

THESIS / THÈSE

MASTER EN SCIENCES MATHÉMATIQUES

Construction d'un mapping symplectique pour les satellites artificiels et les débris spatiaux

Valk, Stephane

Award date:
2002

[Link to publication](#)

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal ?

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

Construction d'un mapping symplectique pour les satellites artificiels et les débris spatiaux

Valk Stéphane

6 mai 2002

Table des matières

1	Introduction	1
2	Développement en harmoniques sphériques	3
2.1	Potentiel créé par la Terre en un point extérieur	4
2.2	Propriétés des harmoniques sphériques	8
2.3	Normalisation des harmoniques sphériques	9
2.4	Expression en fonction des éléments elliptiques	11
2.5	Classification des harmoniques	16
2.6	Formule alternative pour le potentiel	17
3	Formulation hamiltonienne des perturbations	19
3.1	Perturbation due à la pression de radiation solaire	20
3.2	Perturbation luni-solaire	23
4	Seconds membres des équations de Gauss	25
4.1	Influence du drag atmosphérique sur les variables de Delaunay	26
4.2	Changement de repère et vitesse relative	27
4.3	Moyennisation	29
4.3.1	Moyennisation de \dot{h}_d	30
4.3.2	Moyennisation de \dot{L}_d	32
5	Les grandes lignes de l'algorithme	34
5.1	Les mappings symplectiques	35
5.2	Le choix du mapping	35
5.3	Perturbation due au potentiel terrestre	37
5.3.1	La partie zonale	37
5.3.2	La partie tessérale	38
5.4	Pression de radiation solaire	40
5.5	Perturbation Luni-solaire	40
5.6	Effet de traînée	41
5.6.1	Le modèle atmosphérique	42
5.6.2	Moyennisation des équations de Gauss	43

6	L'algorithme - Applications	47
6.1	Les données numériques	48
6.2	Analyse de la précision et de la fiabilité de l'algorithme	50
6.3	Effets des différentes perturbations	53
6.4	le drag atmosphérique	57
6.5	Conservation de l'énergie	57
6.6	Code source et commentaires SYMPSAT 2	59
6.6.1	MAP410.FOR	59
	Conclusion	76
A	Précisions complémentaires	77
A.1	Expression du Laplacien $\nabla^2 V$ en coordonnées sphériques	78
A.2	Le mapping "midpoint method" est du second ordre	79
A.3	Caractère symplectique du mapping "midpoint method"	80
A.4	Fonctions d'inclinaison $F_{imp}(I)$	82
A.5	Fonctions d'excentricité $G_{lpq}(e)$	82
	Bibliographie	85

Chapitre 1

Introduction

De nos jours, les satellites artificiels modifient la vie sur la Terre et l'y organisent : satellites de communication pour les échanges de sons et d'images, satellites météorologiques pour la prévision du temps, satellites de navigation pour le guidage précis de navires sur toutes les mers du monde, satellites scientifiques à missions hautement spécialisées, satellites militaires aux applications publiques ou secrètes multiples, etc. Depuis Spoutnik 1, lancé en 1957, plus de 4000 engins ont été expédiés dans l'espace par les diverses nations de la planète. Il s'agit autant de satellites placés sur l'une ou l'autre orbite terrestre que de sondes qui ont quitté l'environnement immédiat de la Terre pour explorer la Lune ou les autres planètes. Lors de chacune de ces missions, un grand nombre de débris sont générés. Ces débris sont de différentes origines : citons d'abord les gros débris, ceux-ci peuvent provenir de morceaux du lanceur lui-même, ou d'objets perdus par les astronautes, ou encore de vieux satellites inutilisés, etc. Le catalogue du NORAD (North American Aerospace Defense) - sans doute le plus complet qui existe au monde - fait état de plus de 8500 objets de plus de 10 cm en orbite autour de la Terre. Si l'on s'intéresse maintenant aux débris plus petits, de l'ordre du centimètre, on arrive déjà à plus de 100.000 objets répertoriés et on dépasse le million pour des débris de type particule de l'ordre du millimètre. Les temps de vie de ces débris sont également très différents, de l'ordre d'un an, d'une dizaine d'années, même de siècles pour les orbites les plus hautes.

Dans le but d'éviter toute collision avec un satellite ou une station en activité, il est donc nécessaire de déterminer l'orbite de ces débris et ceci en particulier pour les plus gros. On pourrait dès lors penser à l'intégration purement numérique des équations différentielles du mouvement ; en effet, la mise en oeuvre d'une telle méthode est beaucoup moins lourde que celle des méthodes analytiques. Cependant, ces méthodes ne permettent pas d'obtenir, comme pour les théories analytiques, des informations qualitatives sur le comportement du système. Elles sont également très coûteuses en temps de calcul et d'autant plus que l'intervalle d'intégration est grand. Signalons encore que la précision obtenue dépend fortement de l'intervalle d'intégration et se dégrade rapidement lorsque cette longueur croît. Dans le cadre de ce

mémoire, nous choisirons une méthode dite mixte. Dans une telle méthode, on intègre numériquement un système différentiel moyennisé sur les courtes périodes. Ce système différentiel est construit à partir du système différentiel initial à l'aide d'une théorie analytique et éventuellement complétée par des quadratures numériques pour certaines perturbations. Le fait d'éliminer les variations à courtes périodes du système différentiel permet en fait d'utiliser un pas d'intégration plus grand et réduit ainsi le temps de calcul nécessaire et les effets d'erreurs.

Ce mémoire consiste à analyser un algorithme basé sur un mapping symplectique, mis au point par S. Breiter et G. Metris et contenant différentes contributions gravitationnelles, comme les perturbations luni-solaires, ou non gravitationnelles, comme le drag atmosphérique et la pression de radiation solaire. Ce mapping est construit à partir des équations du problème du satellite artificiel, moyennisées sur les courtes périodes, de façon analytique. Les termes zonaux et tesseraux du géopotentiel y sont présents jusqu'à l'ordre 6.

Je procéderai en deux étapes. Premièrement, je présenterai différents concepts théoriques nécessaires à la compréhension générale de l'algorithme. Au Chapitre 2, je montrerai, de manière assez détaillée, comment le potentiel terrestre, influencé par différentes perturbations, peut être exprimé sous la forme d'un développement en série et plus précisément, un développement en harmoniques sphériques. Je donnerai ensuite, dans le contexte de notre algorithme, une forme plus adéquate à ce développement. Le Chapitre 3, pour sa part, s'attachera à décrire la perturbation due à la pression de radiation solaire et la perturbation luni-solaire ainsi qu'à montrer comment l'on peut exprimer ces perturbations sous une forme hamiltonienne. Enfin, Le Chapitre 4 nous permettra de déterminer l'influence d'une force non conservative sur les équations différentielles du mouvement. Nous appliquerons alors ce résultat dans le cas qui nous intéresse ici ; à savoir, l'influence d'une force de drag atmosphérique.

La seconde partie concerne l'algorithme proprement dit. Au Chapitre 5, de manière analogue à l'article de référence (c.f [6]), je présenterai les grandes lignes de l'algorithme, basées pour la plupart sur les concepts théoriques que j'aurai développés dans les chapitres précédents, ainsi que différents détails techniques. Finalement, Le dernier chapitre de ce mémoire consistera en une application du programme **SYMPSAT2** correspondant à l'algorithme. Je développerai une analyse de la fiabilité et de la précision de ce programme en comparant différents résultats avec un ensemble de données relatives à certains satellites artificiels. A l'aide de ce programme, je m'intéresserai également à l'analyse des effets respectifs de chacune des perturbations. Comme dernier point, je commenterai le code source principale de cette algorithme de manière à mieux cerner son implémentation.

Chapitre 2

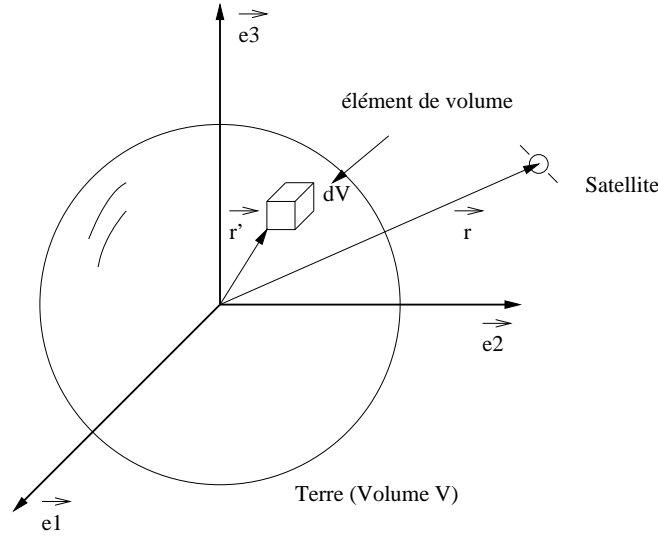
Développement en harmoniques sphériques

Sommaire

2.1	Potentiel créé par la Terre en un point extérieur	4
2.2	Propriétés des harmoniques sphériques	8
2.3	Normalisation des harmoniques sphériques	9
2.4	Expression en fonction des éléments elliptiques	11
2.5	Classification des harmoniques	16
2.6	Formule alternative pour le potentiel	17

2.1 Potentiel créé par la Terre en un point extérieur

Notre objectif est ici de déterminer l'expression analytique du potentiel terrestre en un point extérieur à la terre en tenant compte de diverses perturbations telles que celles dues à la non sphéricité et la non homogénéité de la Terre.



Nous savons que la force gravitationnelle est conservative, elle dérive donc d'un potentiel V .

$$\vec{F} \text{ conservative} \Leftrightarrow \vec{F} = -\vec{\nabla}V$$

Dans le cas d'une force centrale, nous avons :

$$\vec{F} = -r^{-n} \vec{r} = [-r^{-n}][x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3]$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial x} &= -(-n)r^{n+1} \frac{\partial r}{\partial x} \cdot x + (-r)^{-n} \\ &= \frac{n}{r^{n+1}} \frac{\partial r}{\partial x} x - \frac{1}{r^n} \\ &= \frac{n}{r^{n+1}} \frac{x^2}{r} - \frac{1}{r^n} = \frac{n}{r^{n+2}} x^2 - \frac{1}{r^n} \end{aligned}$$

De même, on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_2}{\partial y} &= \frac{n}{r^{n+2}} y^2 - \frac{1}{r^n} \\ \frac{\partial F_3}{\partial z} &= \frac{n}{r^{n+2}} z^2 - \frac{1}{r^n} \end{aligned}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{n}{r^{n+2}} \underbrace{(x^2 + y^2 + z^2)}_{r^2} - \frac{3}{r^n} = \frac{n-3}{r^n}$$

or, dans le cas gravitationnel, $n = 3$

$$n = 3 \rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 0$$

i.e

$$\nabla^2 V = \vec{\nabla} \cdot (-\vec{\nabla} V) = 0 \quad (2.1)$$

Le potentiel est donc solution de l'équation de Laplace

Considérons les coordonnées sphériques classiques

$$\begin{aligned} x &= r \cos \phi \cos \lambda \\ y &= r \cos \phi \sin \lambda \\ z &= r \sin \phi \end{aligned}$$

Le Laplacien s'exprime dès lors sous la forme : (c.f Annexe A.1)

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial}{\partial r}) + \frac{1}{\cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (\cos \phi \frac{\partial}{\partial \phi}) + \frac{1}{\cos^2 \phi} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \right]$$

Nous allons résoudre l'équation différentielle (2.1) par la méthode de séparation des variables. On propose donc comme solution :

$$V(r, \lambda, \phi) = R(r) \cdot S(\lambda) \cdot F(\phi)$$

On obtient ainsi une nouvelle équation différentielle

$$\underbrace{\frac{d}{dr} (r^2 R') \frac{1}{R}}_{\text{dépend de } r \text{ uniquement} \dots} + \underbrace{\frac{1}{\cos \phi} \frac{d}{d\phi} (\cos \phi F') \frac{1}{F} + \frac{1}{\cos^2 \phi} \frac{S''}{S}}_{\text{dépend de } \lambda \text{ et } \phi \text{ uniquement} \dots} = 0 \quad (2.2)$$

Dans la mesure où le premier membre ne dépend que de r et le second ne dépend que de λ et ϕ , on peut évaluer ces deux membres à une même constante (au signe près) Il nous reste alors à résoudre les deux équations différentielles suivantes :

$$\frac{d}{dr} (r^2 R') \frac{1}{R} = \alpha \quad (2.3)$$

$$\frac{1}{\cos \phi} \frac{d}{d\phi} (\cos \phi F') \frac{1}{F} + \frac{1}{\cos^2 \phi} \frac{S''}{S} = -\alpha \quad (2.4)$$

Réécrivons (2.3) $r^2 R'' + 2rR' - \alpha R = 0$

Pour résoudre cette équation, on propose une solution de la forme :

$$R(r) = r^s$$

On obtient ainsi deux solutions :

$$\begin{aligned} R_1(r) &= r^l \\ R_2(r) &= r^{-l-1} \end{aligned}$$

Par le principe de superposition, nous savons que toute combinaison linéaire de solutions d'une équation différentielle linéaire homogène est encore une solution.

On considère ainsi comme nouvelle solution :

$$R(r) = A_1 r^l + A_2 r^{-(l+1)}$$

Cependant, on désirerait obtenir un potentiel qui s'annule à l'infini, i.e t.q

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} R(r) = 0$$

Suivant que $l < 0$ ou $l > 0$, on éliminera donc une des deux fonctions (i.e $A_1 = 0$ ou $A_2 = 0$). S.p.d.g supposons que $l > 0$

La solution de (2.3) est donc :

$$\boxed{R(r) = A_2 r^{-(l+1)}} \quad (2.5)$$

Passaons maintenant à la résolution de l'équation (2.4), On a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos \phi} \frac{d}{d\phi} (\cos \phi F') \frac{1}{F} + \frac{1}{\cos^2 \phi} \frac{S''}{S} + \underbrace{l(l+1)}_{\alpha} &= 0 \\ \underbrace{\cos \phi \frac{d}{d\phi} (\cos \phi F') \frac{1}{F} + l(l+1) \cos^2 \phi}_{\phi \text{ uniquement}} + \underbrace{\frac{S''}{S}}_{\lambda \text{ uniquement}} &= 0 \end{aligned}$$

Par un raisonnement analogue à la résolution de l'équation (2.2), on obtient les deux E.D.O suivantes :

$$\frac{S''}{S} = \beta \quad (2.6)$$

$$\cos \phi \frac{d}{d\phi} (\cos \phi F') \frac{1}{F} + l(l+1) \cos^2 \phi = -\beta \quad (2.7)$$

L'équation (2.6) nous donne comme solution

$$\boxed{S(\lambda) = B_1 \cos m\lambda + B_2 \sin m\lambda \quad \text{avec } \beta = -m^2 < 0} \quad (2.8)$$

La résolution de l'équation différentielle (2.7) est beaucoup plus compliquée à effectuer que celle des équations précédentes.

Résumons brièvement la méthode utilisée :

Considérons un changement de variable :

$$F = (1 - \mu^2)^{m/2} \cdot V(\mu) \quad \text{avec} \quad \mu = \sin \phi$$

Nous obtenons alors l'équation suivante :

$$(1 - \mu^2)V'' - 2\mu V'(m+1) + [(l+1)l - m(m+1)]V = 0 \quad (2.9)$$

La solution de cette équation différentielle est un polynôme $V_{l,m}(\mu)$

$$V_{l,m}(\mu) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \mu^k$$

Les coefficients de ce polynôme peuvent être déterminés par récurrence en insérant l'expression de $V_{l,m}$ dans l'équation (2.9).

On obtient finalement :

$$\begin{aligned} F_{m,l} &= (1 - \sin^2 \phi)^{m/2} \cdot V_{l,m}(\mu) \\ &= (\cos \phi)^m \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \mu^k \\ &= (\cos \phi)^m \sum_{s=0}^K T_{l,m,s} (\sin \phi)^{l-m-2s} \quad \text{avec } K = E\left(\frac{l-m}{2}\right) \text{ et } m \leq l \end{aligned}$$

La condition sur m apparaît explicitement lors de la détermination des coefficients. $F_{l,m}$ est connu sous le nom de *polynôme de Legendre associé* et est en général noté $P_{l,m}$

On a :

$$P_l(z) = \frac{d^l}{dz^l} (z^2 - 1)^l \frac{1}{2^l l!} \quad (2.10)$$

$$P_{l,m}(z) = (1 - z^2)^{m/2} \frac{d^m}{dz^m} P_l(z) \quad (2.11)$$

Le potentiel peut maintenant s'exprimer sous la forme désirée :

$$V(r, \lambda, \phi) = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^l \frac{1}{r^{l+1}} [C_{l,m} \cos m\lambda + S_{l,m} \sin m\lambda] P_{l,m}(\sin \phi) \quad (2.12)$$

Les expressions analytiques des coefficients $C_{l,m}$ et $S_{l,m}$ sont connues et sont indépendantes du satellite étudié.

$$C_{l,m} = \frac{(2 - \delta_{0m})(l - m)!}{(l + m)!} \int_V r'^l P_{l,m}(\sin \phi') \cos m\lambda' \rho(\vec{r}') dV \quad (2.13)$$

$$S_{l,m} = \frac{(2 - \delta_{0m})(l - m)!}{(l + m)!} \int_V r'^l P_{l,m}(\sin \phi') \sin m\lambda' \rho(\vec{r}') dV \quad (2.14)$$

où λ' et ϕ' sont les coordonnées sphériques de l'élément de masse dV , et où $\rho(\vec{r}')$ représente la densité de l'élément de masse situé en \vec{r}'

Remarquons que pour $m = 0$, la perturbation correspondante est indépendante de la longitude λ . $S_{l,0}$ est nul et $C_{l,0}$ est appelé coefficient de l'harmonique zonale de degré l du potentiel. Dans le cas où $m \neq 0$, $C_{l,m}$ et $S_{l,m}$ représentent les coefficients des harmoniques tessérales de degré l et d'ordre m . Bien que les expressions des coefficients $C_{l,m}$ et $S_{l,m}$ soient connues, on ne peut pas les déterminer à partir de (2.13) et (2.14) car nous ne connaissons pas la répartition exacte de la densité au sein de la Terre. Dans la pratique, on détermine les valeurs des coefficients suite à l'observation des trajectoires de satellites connus ; ensuite, on peut réutiliser les valeurs obtenues pour de futurs satellites.

2.2 Propriétés des harmoniques sphériques

La formule (2.12) peut être réexprimée sous la forme :

$$V(r, \lambda, \phi) = \sum_{lmi}^{+\infty} \frac{1}{r^{l+1}} \psi_{l,m}^i$$

où $\psi_{l,m}^i$ sont appelés les harmoniques sphériques.

$i = 1$ correspond aux termes de la forme $C_{l,m} \cos m\lambda P_{l,m}(\sin \phi)$ et $i = 2$ aux termes de la forme $S_{l,m} \sin m\lambda P_{l,m}(\sin \phi)$.

– Les harmoniques sphériques possèdent la propriété d'orthogonalité :

$$\int_0^{2\pi} d\lambda \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\phi \psi_{l,m}^i \psi_{l',m'}^{i'} = 0 \quad \text{si } l \neq l' \text{ ou } i \neq i' \text{ ou } m \neq m'$$

Cette propriété fait des harmoniques sphériques un moyen naturel pour la représentation générale de fonctions définies sur une surface sphérique comme l'étaient les séries de Fourier pour une fonction définie dans un espace cartésien.

on a donc :

$$\begin{aligned}
& \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \psi_{l,m}^i \psi_{l,m}^i d\phi d\lambda \\
&= \left\{ \begin{array}{l} C_{l,m}^2 \\ S_{l,m}^2 \end{array} \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\lambda d\phi \left\{ \begin{array}{l} \cos^2 m\lambda \\ \sin^2 m\lambda \end{array} \right. P_{l,m}^2(\sin \phi) \right. \\
&= U_{l,m}^2 \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} 2\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} P_{l,m}^2(\sin \phi) d\phi \quad m \neq 0 \\ 2\pi \underbrace{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} P_{l,0}^2(\sin \phi) d\phi}_{N_{m,l}^2} \quad m = 0 \end{array} \right. \\
&= U_{l,m}^2 \cdot (\pi \text{ ou } 2\pi) \cdot N_{l,m}^2
\end{aligned}$$

On peut, dès lors, définir les harmoniques sphériques normalisées

$$\hat{\Psi}_{l,m}^i = \Psi_{l,m}^i \frac{1}{N_{l,m}} \sqrt{\frac{2 - \delta_{0m}}{2\pi}} \cdot \frac{1}{U_{l,m}^2}$$

δ_{0m} étant le symbole de Kronecker égal à 1 si $m = 0$ et à 0 sinon.

- Un moyen facile pour caractériser différentes harmoniques sphériques $\Psi_{l,m}^i$ est de s'intéresser à leurs zéros. (c.f Figure 2.1)

2.3 Normalisation des harmoniques sphériques

L'expression (2.12) possède plusieurs inconvénients :

- Les polynômes $P_{l,m}$ ne sont pas normés
- Les coefficients $C_{l,m}$ et $S_{l,m}$ ne sont pas sans dimension
- Certains termes dépendent de la longitude λ et d'autres pas (ceux, pour lesquels $m = 0$)

On préférera alors l'expression :

$$\begin{aligned}
V &= \frac{\mu}{r} - \frac{\mu}{r} \sum_{l \geq 2} \left(\frac{R_e}{r} \right)^l J_l \bar{P}_{l,0}(\sin \phi) \\
&+ \frac{\mu}{r} \sum_{l \geq 2} \left(\frac{R_e}{r} \right)^l \sum_{m=1}^l \bar{P}_{l,m}(\sin \phi) [\bar{C}_{l,m} \cos m\lambda + \bar{S}_{l,m} \sin m\lambda]
\end{aligned} \tag{2.15}$$

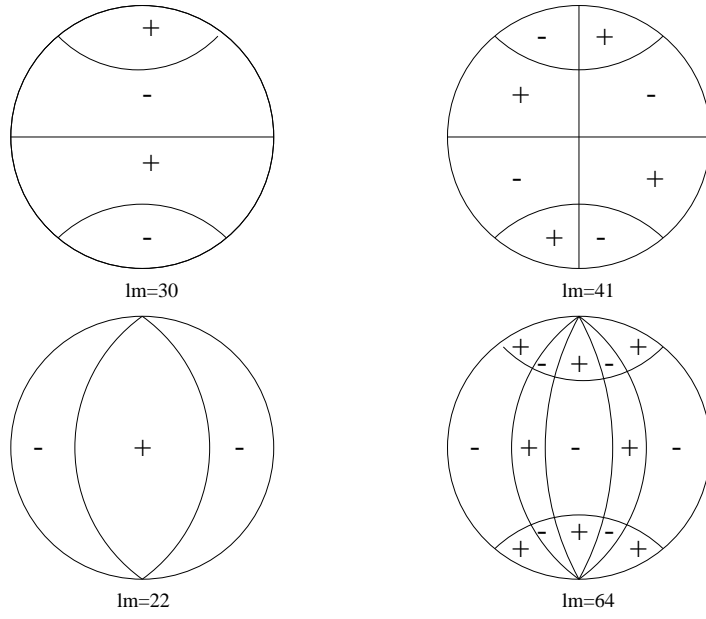


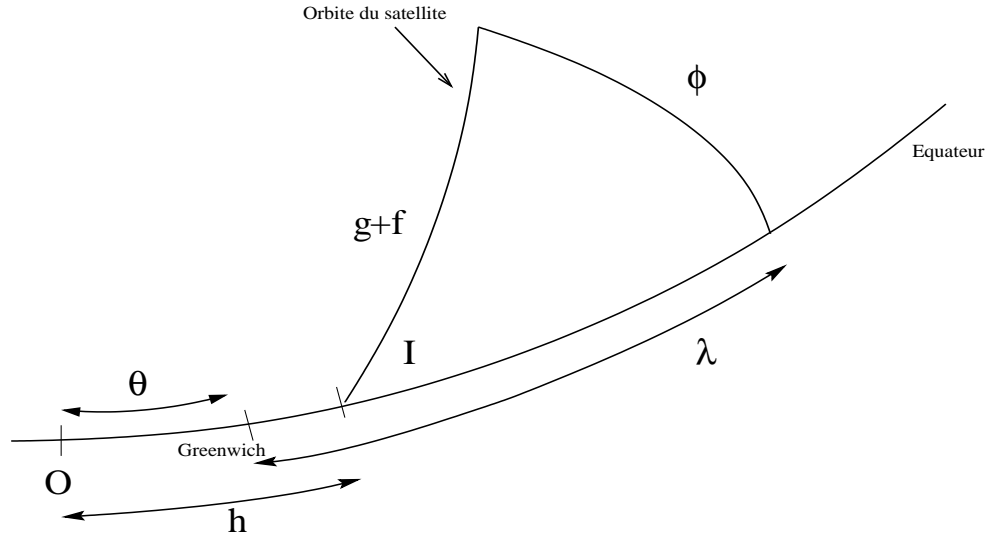
Figure 2.1 – Une harmonique $\Psi_{l,m}^i$ possède $l - m$ zéros sur une distance π le long d'un méridien et m zéros sur la même distance le long d'un parallèle.(Kaula)

avec

$$\begin{aligned}
 J_l &= \frac{-(2l+1)^{-1/2}}{MR_e^l} C_{l,0} \\
 \bar{P}_{l,0}(\sin \phi) &= (2l+1)^{-1/2} P_{l,0} \\
 \bar{P}_{l,m} &= \left[\frac{2(2l+1)(l-m)!}{(l+m)!} \right]^{1/2} P_{l,m}(\sin \phi) \quad m \neq 0 \\
 \bar{C}_{l,m} &= \left[\frac{(l+m)!}{2(2l+1)(l-m)!} \right]^{1/2} \frac{1}{MR_e} C_{l,m} \\
 \bar{S}_{l,m} &= \left[\frac{(l+m)!}{2(2l+1)(l-m)!} \right]^{1/2} \frac{1}{MR_e} S_{l,m}
 \end{aligned}$$

2.4 Expression en fonction des éléments elliptiques

L'expression analytique du potentiel perturbateur (2.12) n'est pas utilisable dans sa forme actuelle. En effet, pour écrire ultérieurement les équations différentielles du mouvement du satellite artificiel, nous devons être en mesure d'exprimer le potentiel perturbateur en termes des coordonnées et vitesses du satellite, ou encore mieux, en termes des éléments elliptiques qui leurs sont équivalents.



$$\begin{aligned}
 V &= \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^l \frac{\mu R_e^l}{r^{l+1}} P_{l,m}(\sin \phi) (\bar{C}_{l,m} \cos m\lambda + \bar{S}_{l,m} \sin m\lambda) \\
 &\underset{\text{not}}{=} \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^l V_{l,m} \\
 &= \frac{\mu}{r} + \sum_{l=2}^{+\infty} V_{l,m}
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

λ = longitude géographique ($\lambda = 0$ correspond à la longitude de Greenwich)

ϕ = latitude géographique

Considérons une origine O définie sur l'équateur ainsi que h la longitude du noeud ascendant calculée à partir de cette origine.

Appelons θ la longitude de Greenwich calculée par rapport à O

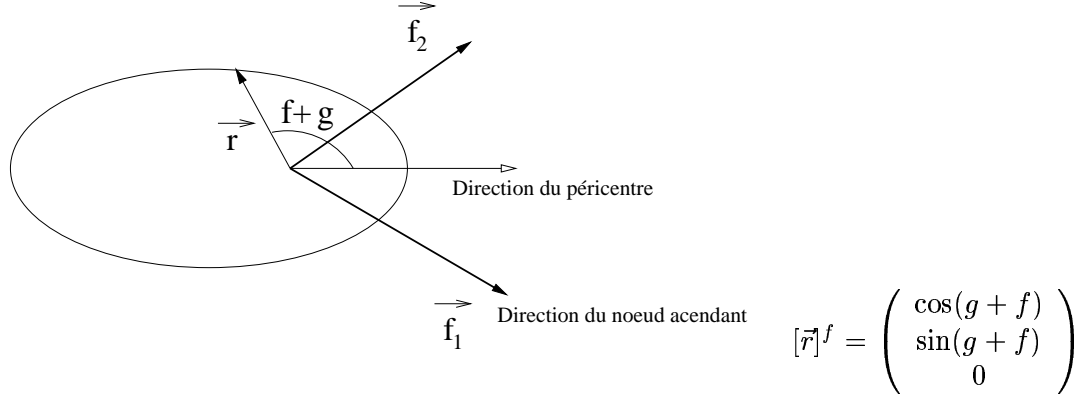
$$\alpha \underset{\text{not}}{=} \theta + \lambda$$

$$\lambda = \alpha - \theta = (\alpha - h) + (h - \theta)$$

Considérons le système d'axes $\vec{E} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ orthonormé droitier, \vec{e}_1, \vec{e}_2 étant deux axes dans le plan équatorial, avec \vec{e}_1 dans la direction du noeud ascendant.

Considérons également un autre repère orthonormal droitier $\vec{F} = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ dans le plan de l'orbite du satellite, \vec{f}_1 coïncidant avec \vec{e}_1

Le vecteur position \vec{r} du satellite dans le repère \vec{F} est alors :



De même, ce vecteur a pour composantes dans le repère \vec{E} :

$$[\vec{r}]^E = [id]_f^E [\vec{r}]^F = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos I & -\sin I \\ 0 & \sin I & \cos I \end{pmatrix}}_{\text{rotation d'angle } I \text{ autour de } \vec{e}_1} \begin{pmatrix} \cos(g+f) \\ \sin(g+f) \\ 0 \end{pmatrix}$$

on en déduit :

$$\begin{pmatrix} \cos(g+f) \\ \cos I \sin(g+f) \\ \sin I \sin(g+f) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha-h) \cos \phi \\ \sin(\alpha-h) \cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix}$$

On a donc les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \cos(g+f) &= \cos(\alpha-h) \cos \phi \\ \cos I \sin(g+f) &= \sin(\alpha-h) \cos \phi \\ \sin I \sin(g+f) &= \sin \phi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(\alpha-h) &= \frac{1}{\cos \phi} \cos(g+f) \\ \sin(\alpha-h) &= \frac{1}{\cos \phi} \sin(g+f) \cos I \\ \sin \phi &= \sin(g+f) \sin I \end{aligned}$$

Remarquons que, de manière générale, on a :

$$\begin{aligned}
 \cos m\beta &= \operatorname{Re}(e^{im\beta}) \\
 &= \operatorname{Re}((e^{i\beta})^m) \\
 &= \operatorname{Re}[(\cos \beta + i \sin \beta)^m] \\
 &= \operatorname{Re} \left[\sum_{k=0}^m i^k \sin^k \beta (\cos \beta)^{m-k} \binom{m}{k} \right]
 \end{aligned}$$

De manière analogue, on a :

$$\begin{aligned}
 \sin m\beta &= \operatorname{Re}(-ie^{im\beta}) \\
 &= \operatorname{Re} \left[\sum_{k=0}^m i^{k-1} \sin^k \beta (\cos \beta)^{m-k} \binom{m}{k} \right]
 \end{aligned}$$

Nous pouvons montrer que :

$$(\sin \beta)^s (\cos \beta)^t = \frac{(-1)^s (i)^s}{2^{s+t}} \sum_{l=0}^s \sum_{l'=0}^t \binom{s}{l} \binom{t}{l'} (-1)^l \underbrace{e^{i\beta(s+t-2l-2l')}}_{\cos(s+t-2l-2l')\beta + i \sin(s+t-2l-2l')\beta} \quad (2.17)$$

Sachant que :

$$\begin{aligned}
 \cos m\lambda &= \cos m(\alpha - h) \cos m(h - \theta) - \sin m(\alpha - h) \sin m(h - \theta) \\
 \sin m\lambda &= \sin m(\alpha - h) \cos m(h - \theta) + \cos m(\alpha - h) \sin m(h - \theta)
 \end{aligned}$$

On a alors :

$$\begin{aligned}
 \cos m\lambda &= \frac{\operatorname{Re} \left[\sum_{k=0}^m i^k \frac{1}{(\cos \phi)^m} \sin^k(g+f) \cos^k i \cos^{m-k}(g+f) \binom{m}{k} \right]}{(\cos m(h - \theta) + i \sin m(h - \theta))} \times \\
 \sin m\lambda &= \frac{\operatorname{Re} \left[\sum_{k=0}^m i^k \frac{1}{(\cos \phi)^m} \sin^k(g+f) \cos^k i \cos^{m-k}(g+f) \binom{m}{k} \right]}{(-i \cos m(h - \theta) + \sin m(h - \theta))} \times
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{l,m} &= \frac{\mu R_e^l}{r^{l+1}} P_{l,m}(\sin \phi) (\bar{C}_{l,m} \cos m\lambda + \bar{S}_{l,m} \sin m\lambda) \\
&= \frac{\mu R_e^l}{r^{l+1}} \sum_{j=0}^K T_{l,m,j} (\sin \phi)^{l-m-2j} \times \\
&\quad \left[C_{l,m} \operatorname{Re} \left(\sum_{k=0}^m \dots \right) \cos m(h - \theta) + i \sin m(h - \theta) \right] \\
&\quad + S_{l,m} \operatorname{Re} \left(\sum_{k=0}^m \dots \right) [-i \cos m(h - \theta) + \sin m(h - \theta)] \\
&= \frac{\mu R_e^l}{r^{l+1}} \sum_{j=0}^K T_{l,m,j} (\sin I)^{l-m-2j} \sin^{l-m-2j}(g + f) \times \\
&\quad \operatorname{Re} [(C_{l,m} - i S_{l,m}) \cos m(h - \theta) + (S_{l,m} + i C_{l,m}) \sin m(h - \theta)] \times \\
&\quad \sum_{k=0}^m i^k \sin^k(g + f) \cos^k i \cos^{m-k}(g + f) \binom{m}{k} \\
&= \frac{\mu R_e^l}{r^{l+1}} \sum_{j=0}^K T_{l,m,j} (\sin I)^{l-m-2j} \times \\
&\quad \operatorname{Re} \left[(\dots) \sum_{k=0}^m i^k (\cos I)^k \binom{m}{k} \sin^{k+l-m-2j}(g + f) \cos^{m-k}(g + f) \right]
\end{aligned}$$

En utilisant la relation (2.17) on a

$$\begin{aligned}
V_{l,m} &= \frac{\mu R_e^l}{r^{l+1}} \sum_{j=0}^K \dots \operatorname{Re} \left[\dots \sum_{k=0}^m i^k (\cos I)^k A_{k,l}^{m,j} \sum_{l'=0}^{k+l-m-2j} \sum_{l''=0}^{m-k} \binom{k+l-m-2j}{l'} \binom{m-k}{l''} (-1)^{l'} \right] \\
&\quad \times [\cos(l-2j-2l'-2l'')(g+f) + i \sin(l-2j-2l'-2l'')(g+f)]
\end{aligned}$$

avec

$$A_{k,l}^{m,j} = (-1)^{k+l-m-2j} \frac{i^{k+l-m-2j}}{2^{l-2j}}$$

Deux cas sont à envisager selon que $l - m$ est pair ou impair.

En effet, nous avons que pour $l - m$ pair, $i^{2k+l-2m-2j}$ est toujours réel. D'autre part, pour $l - m$ impair, $i^{2k+l-2m-2j}$ est toujours imaginaire.

Posons dès lors :

$$C_{l,m} = \begin{cases} C_{l,m} & \text{si } l - m \text{ est pair} \\ -S_{l,m} & \text{si } l - m \text{ est impair} \end{cases}$$

$$\mathcal{S}_{l,m} = \begin{cases} S_{l,m} & \text{si } l - m \text{ est pair} \\ C_{l,m} & \text{si } l - m \text{ est impair} \end{cases}$$

De très longs calculs, basés sur des changements dans les indices de sommation et l'introduction de l'anomalie moyenne ℓ ainsi que le demi grand axe a dans l'expression du potentiel permettent d'écrire :

$$V_{l,m} = \frac{\mu}{r} \left(\frac{R_e}{r} \right)^l \sum_{p=0}^l F_{lmp}(I) [C_{l,m} \cos((l-2p)(g+f) + m(h-\theta)) + S_{l,m} \sin((l-2p)(g+f) + m(h-\theta))]$$

ainsi que :

$$\frac{1}{r^{l+1}} = \frac{1}{a^{l+1}} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} G_{lpq}(e) \bar{S}_{lmpq}$$

Les fonctions F_{lmp} et G_{lpq} sont des fonctions de l'inclinaison I et de l'excentricité e respectivement. Les G_{lpq} étant développées en série entière de e mais les F_{lmp} étant des fonctions de I sous forme finies. On peut fournir des expressions explicites pour ces fonctions. Ces expressions sont compliquées et peu parlantes.

Finalement, on peut donner au développement de la *fonction perturbatrice* complète d'un satellite la forme suivante :

$$\boxed{\mathcal{K}_Z + \mathcal{K}_T = \sum_{l=2} \frac{\mu R_e^l}{a^{l+1}} \sum_{m=0}^l \sum_{p=0}^l F_{lmp}(I) \sum_{q=-\infty}^{\infty} G_{lpq}(e) \bar{S}_{lmpq}(g, h, \ell, \theta) \stackrel{Not}{=} \mathcal{P}} \quad (2.18)$$

$$\bar{S}_{lmpq} = \begin{bmatrix} \bar{C}_{lm} \\ -\bar{S}_{lm} \end{bmatrix}_{l-m \text{ impair}}^{l-m \text{ pair}} \cos \Psi_{lmpq} + \begin{bmatrix} \bar{S}_{lm} \\ \bar{C}_{lm} \end{bmatrix}_{l-m \text{ impair}}^{l-m \text{ pair}} \sin \Psi_{lmpq} \quad (2.19)$$

$$\Psi_{lmpq} = (l-2p)g + (l-2p+q)\ell + m(h-\theta) \quad (2.20)$$

où $F_{lmp}(I)$ est la fonction d'inclinaison (c.f Annexe A.4), $G_{lpq}(e)$ la fonction d'excentricité (c.f Annexe A.5), \bar{C}_{lm} et \bar{S}_{lm} sont les coefficients normalisés du développement en harmoniques sphériques.

Remarquons que dans le cas zonal ($m = 0$), le potentiel est indépendant de h et de θ i.e de la longitude du noeud ascendant et du temps sidéral.

2.5 Classification des harmoniques

Cette première formulation (2.18) du potentiel perturbateur en fonction des éléments elliptiques permet de déterminer les équations de Lagrange correspondant à l'influence de la perturbation sur ces mêmes éléments (a, e, I, h, g, ℓ) . On a : (c.f [2])

$$\begin{aligned}
 \dot{a} &= \frac{2}{na} \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \ell} \\
 \dot{e} &= -\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial g} + \frac{1-e^2}{na^2 e} \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \ell} \\
 \dot{I} &= -\frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin I} \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial h} + \frac{\cos I}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin I} \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial g} \\
 \dot{h} &= \frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin I} \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial I} \\
 \dot{g} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial e} - \frac{\cos I}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin I} \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial I} \\
 \dot{\ell} &= n - \frac{2}{na} \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial a} - \frac{1-e^2}{na^2 e} \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial e}
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

Dans le cas du mouvement d'un satellite autour de la Terre, les périodes relatives aux angles sont de 1 jour pour θ et de quelques heures pour l'anomalie vraie ℓ . Sur base des équations différentielles (2.21), on montre que les périodes reliées aux angles g et h sont de quelques dizaines à quelques milliers de jours, suivant les valeurs de a, e et I .

On peut classer les harmoniques sphériques suivant les effets qu'elles produisent :

- Les harmoniques zonales de degré pair engendrent des variations à courtes périodes (arguments $j\ell + kg$) et à longues périodes (arguments kg) sur tous les éléments elliptiques. On observe également des effets séculaires sur les angles ℓ, g et h de plusieurs dizaines de kilomètres par jour.
- Les harmoniques zonales de degré impair engendrent des variations à courtes périodes (arguments $j\ell + kg$) et à longues périodes (arguments kg) et des effets séculaires très faibles sur les angles.
- Les harmoniques tessérales engendrent des variations à courtes périodes (arguments $j\ell + kg + ih + s\theta$) sauf dans le cas de résonance ($m \neq 0$ et $\dot{\Psi}_{lmpq} < \dot{\theta}$) où les périodes correspondantes peuvent alors atteindre plusieurs années.

2.6 Formule alternative pour le potentiel

Bien qu'à présent, nous ayons à notre disposition une expression analytique du potentiel perturbateur exprimé en termes des éléments elliptiques, l'application de la formule (2.18) est limitée pour des raisons liées à la complexité et au temps de calcul qui augmentent rapidement avec l'ordre m et le degré l des harmoniques. Il n'est donc pas inutile de vouloir déterminer une expression plus concise que nous utiliserons ultérieurement dans la construction de notre mapping. Cette expression n'étant que citée dans l'article de référence (c.f [6]), je décris ci-dessous les grandes lignes menant à la détermination de cette expression. (c.f [8])

La formule (2.19) peut être réécrite de manière équivalente sous la forme :

$$\bar{S}_{lmpq} = \gamma_{lm} \left\{ \bar{C}_{lm} \cos \left[\Psi_{lmpq} + (l-m) \frac{\pi}{2} \right] + \bar{S}_{lm} \sin \left[\Psi_{lmpq} + (l-m) \frac{\pi}{2} \right] \right\}$$

où $\gamma_{lm} = (-1)^{E[(l-m+1)/2]}$

Au lieu d'utiliser la fonction d'inclinaison $\bar{F}_{lmp}(I)$, nous allons définir une nouvelle fonction

$$\bar{A}_{lm}^k(I) = F_{l,m,(l-k)/2}(I) \quad F_{lmp}(I) = \bar{A}_{lm}^k(I)$$

$V_{l,m}$ devient alors :

$$V_{l,m} = \frac{\mu}{a} \left(\frac{R_e}{a} \right)^l \sum_{k=-l}^l \bar{A}_{lm}^k \sum_{q=-\infty}^{\infty} G_{l,(l-k)/2,q} \bar{S}_{lmpq}$$

où

$$\begin{aligned} \sum' & \text{ correspond à une somme de pas 2.} \\ \bar{S}_{lmpq}(g, h, \ell, \theta) &= \gamma_{km} (\bar{C}_{l,m} \cos \Psi + \bar{S}_{l,m} \sin \Psi) \\ \Psi &= kg + (k+q)\ell + m(h-\theta) + (k-m) \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

On peut dès lors réexprimer le potentiel sous la forme :

$$V = \frac{\mu}{r} + \frac{\mu}{a} \sum_{m=0}^N \sum_{k=-N}^N \sum_{q=-Q}^Q \gamma_{lm} (\bar{\mathbf{C}}_m^{kq} \cos \Psi + \bar{\mathbf{S}}_m^{kq} \sin \Psi) \quad (2.22)$$

avec :

$$\bar{\mathbf{C}}_m^{kq} = \sum_{j=j_1}^N \bar{Q}_{jm}^{kq} \bar{C}_{jm}$$

$$\bar{\mathbf{S}}_m^{kq} = \sum_{j=j_1}^N{}' \bar{Q}_{jm}^{kq} \bar{S}_{jm}$$

$$\bar{Q}_{jm}^{kq} = \bar{Q}_{jm}^{kq}(a, e, I) = \left(\frac{R_e}{a}\right)^j \bar{A}_{jm}^k(I) G_{j,(j-k)/2,q}(e)$$

ainsi que :

$$j_1 = \max \left[k_1, k_1 + 2E \left[\frac{m-k_1+1}{2} \right] \right]$$

$$k_1 = |k| + 2(\delta_{0k} + \delta_{1k})$$

$$N = \max l$$

$$Q = \max |q|$$

La séquence de sommation est telle que les termes de même fréquence ont été regroupés entre eux. Le point fort de cette formule est qu'elle possède la même forme quelle que soit la parité de $l - m$.

Chapitre 3

Formulation hamiltonienne des perturbations

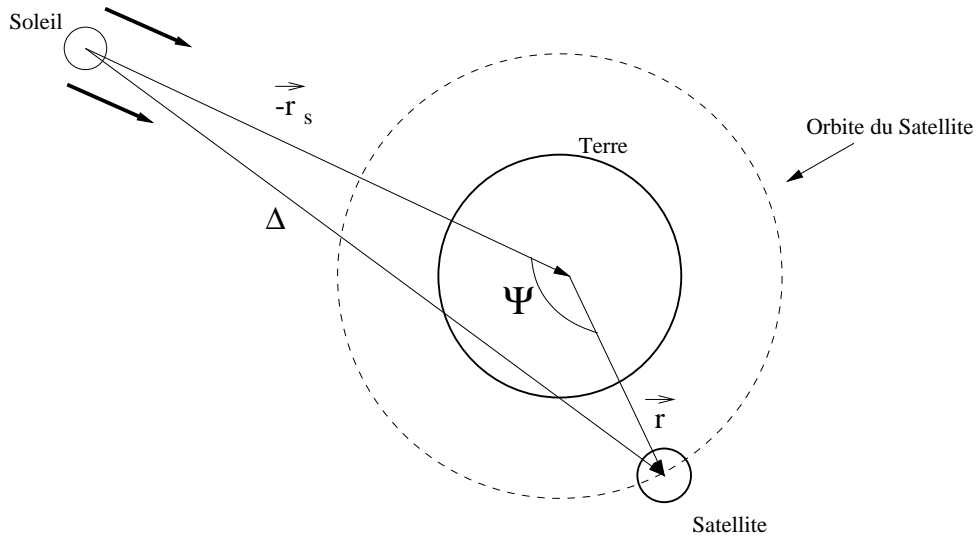
Sommaire

3.1	Perturbation due à la pression de radiation solaire . . .	20
3.2	Perturbation luni-solaire	22

Dans le but de tenir compte ultérieurement des perturbations liées à la pression de radiation solaire ainsi qu'à la présence d'un troisième corps perturbateur, je décris dans ce chapitre la manière d'obtenir les expressions analytiques des fonctions hamiltoniennes correspondant à ces perturbations.

3.1 Perturbation due à la pression de radiation solaire

La pression de radiation solaire est une conséquence directe des lois de Newton. Nous savons en effet qu'un rayonnement électromagnétique possède une certaine quantité de mouvement ; plus précisément, chaque particule élémentaire constituant ce rayonnement électromagnétique, à savoir un photon, possède une quantité de mouvement proportionnel à l'énergie qu'elle emporte. D'autre part, nous savons que la variation de la quantité de mouvement par unité de temps lors d'une interaction photon-particule est équivalente à la force exercée sur cette même particule (c.f [7]).



Passons à la détermination de la fonction hamiltonienne correspondant à cet effet :

On fait l'hypothèse selon laquelle tous les photons solaires rencontrant la paroi du satellite subissent une réflexion spéculaire. D'autre part, on suppose que le satellite est de forme sphérique.

Nous traiterons également le problème uniquement dans le cas d'un satellite éclairé continuellement *i.e* ne passant à aucun moment dans le cône d'ombre de la Terre.

Sous ces hypothèses, on peut montrer que l'accélération du satellite due à la pression de radiation solaire est : (c.f [2])

$$\vec{\gamma} = \alpha \frac{\sum \chi}{m c} \left(\frac{a_s}{\Delta} \right)^2 \vec{u}$$

avec

α coefficient de réflectivité

\sum surface efficace perpendiculaire au rayonnement (exprimé en m^2)

m masse du satellite en kg

χ constante solaire en W/m^2

c vitesse de la lumière en m/s

a_s distance de référence égale à une U.A

Δ distance Soleil-satellite

\vec{u} vecteur unitaire Soleil-satellite

on pose

$$\sigma = \alpha \frac{\sum \chi}{m c}$$

on a donc

$$\vec{\gamma} = \sigma \left(\frac{a_s}{\Delta} \right)^2 \vec{u}$$

On fait ensuite deux approximations : on assimile la distance Soleil-satellite Δ à la distance Soleil-Terre r_s ainsi que le vecteur \vec{u} au vecteur Soleil-Terre $-\vec{r}_s$. L'erreur commise sur la norme et la direction de l'accélération est de l'ordre de 10^{-4} , ce qui est relativement négligeable sachant d'autre part que l'on a un certain degré d'incertitude sur différents paramètres du modèle comme le coefficient de réflectivité et la constante solaire.

Dans le cadre de ces approximations, la force que subit le satellite dérive d'un potentiel :

$$V_{\mathcal{R}} = -\sigma \left(\frac{a_s}{r_s} \right)^2 \vec{r} \cdot \vec{r}_s$$

L'hamiltonien correspondant est alors :

$$\mathcal{H}_{\mathcal{R}} = \sigma \left(\frac{a_s}{r_s} \right)^2 \vec{r} \cdot \vec{r}_s$$

Sachant que :

$$r_1 = r[\cos h \cos(f + g) - \sin h \sin(f + g) \cos I]$$

$$r_2 = r[\sin h \cos(f + g) + \cos h \sin(f + g) \cos I]$$

$$r_3 = r[\sin(f + g) \sin I]$$

ainsi que

$$\vec{r} \cdot \vec{r}_s = r r_s \cos \Psi$$

où Ψ est l'angle géocentrique entre le satellite et le corps perturbateur, *i.e* le soleil.
Nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}\cos \Psi = & A_s[\cos h \cos(f+g) - \sin h \sin(f+g) \cos I] + \\ & B_s[\sin h \cos(f+g) + \cos h \sin(f+g) \cos I] + \\ & C_s[\sin(f+g) \sin I]\end{aligned}$$

A_s, B_s, C_s représentant les trois composantes du vecteur normés $\frac{\vec{r}_s}{r_s}$

Nous pouvons ainsi réexprimer l'hamiltonien sous la forme :

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{\mathcal{R}} = & \sigma \left(\frac{a_s}{r_s} \right)^2 * \\ & (A_s[\cos h \cos(f+g) - \sin h \sin(f+g) \cos I] + \\ & B_s[\sin h \cos(f+g) + \cos h \sin(f+g) \cos I] + \\ & C_s[\sin(f+g) \sin I])\end{aligned}$$

De façon à moyenniser cet hamiltonien, nous devons utiliser les relations générales suivantes

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{r}{a} \cos f \right\rangle_{\ell} &= -\frac{3}{2}e + \mathcal{O}(e^2) \\ \left\langle \frac{r}{a} \sin f \right\rangle_{\ell} &= 0 + \mathcal{O}(e^2)\end{aligned}$$

on en déduit l'hamiltonien moyennisé :

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_{\mathcal{R}} = & -\frac{3}{2}\sigma \left(\frac{a_s}{r_s} \right)^2 ae* \\ & (A_s[\cos h \cos g - \sin h \sin g \cos I] + \\ & B_s[\sin h \cos g + \cos h \sin g \cos I] + \\ & C_s[\sin g \sin I])\end{aligned}$$

3.2 Perturbation luni-solaire

Considérons tout d'abord le problème des trois corps représenté à la Figure 3.1 avec les notations suivantes :

$\mu_c = Gm'$ i.e le produit de la constante de la gravitation par la masse du troisième corps

r est la distance du satellite prise par rapport à la Terre

r_c est la distance du corps perturbateur par rapport à la Terre

Ψ est l'angle géocentrique entre le satellite et le corps perturbateur

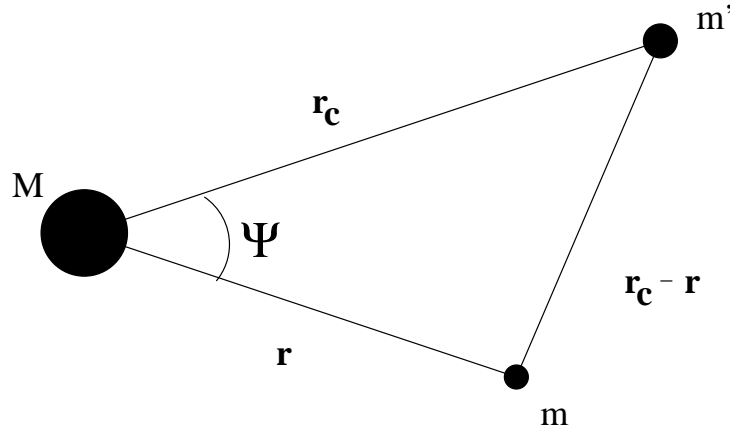


Figure 3.1 – Les rayons vecteurs \mathbf{r} et \mathbf{r}_c ($r < r_c$) de deux masses m (Satellite) et m' (Lune ou Soleil) par rapport au corps central M (Terre). L'angle entre les deux rayons vecteurs est ψ .

Avec ces notation, l'équation du mouvement pour la masse m est :

$$\ddot{\mathbf{r}} + G(M + m)\frac{\mathbf{r}}{r^3} = Gm' \left(\frac{\mathbf{r}_c - \mathbf{r}}{\|\mathbf{r}_c - \mathbf{r}\|^3} - \frac{\mathbf{r}_c}{r_c^3} \right)$$

La fonction perturbatrice peut alors s'exprimer comme

$$\mathcal{R} = \frac{\mu_c}{\|\mathbf{r}_c - \mathbf{r}\|} - \mu_c \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_c}{r_c^3}$$

Par la règle du cosinus, on a :

$$\|\mathbf{r}_c - \mathbf{r}\|^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \psi$$

Dès lors,

$$\frac{1}{\|\mathbf{r}_c - \mathbf{r}\|} = \frac{1}{r_c} \left[1 - 2\frac{r}{r_c} \cos \psi + \left(\frac{r}{r_c} \right)^2 \right]^{-1/2}$$

qui peut être développé en série entière dont les coefficients sont les polynômes de Legendre.

$$\frac{1}{\|\mathbf{r}_c - \mathbf{r}\|} = \frac{1}{r_c} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{r_c}\right)^n P_n(\cos \psi)$$

où, $P_0(\cos \psi) = 1$, $P_1(\cos \psi) = \cos(\psi)$, $P_2(\cos \psi) = \frac{1}{2}(3 \cos^2 \psi - 1)$.

Puisque $\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_c = r r_c \cos \psi$, la fonction perturbatrice peut se réécrire

$$\mathcal{R} = \frac{\mu_c}{r_c} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{r}{r_c}\right)^n P_n(\cos \psi)$$

où le terme en $P_0(\cos \psi)$ a été omis puisqu'il ne dépend pas de r .

Chapitre 4

Seconds membres des équations de Gauss

Sommaire

4.1	Influence du drag sur les variables de Delaunay	25
4.2	Changement de repère et vitesse relative	26
4.3	Moyennisation	29
4.3.1	Moyennisation de \dot{h}_d	30
4.3.2	Moyennisation de \dot{L}_d	31

Contrairement au cas de la perturbation due à la pression de radiation solaire ou de celle liée à la présence d'un troisième corps, la perturbation correspondant à une force de drag atmosphérique ne peut s'exprimer analytiquement sous forme hamiltonienne. Nous devons alors procéder autrement :

4.1 Influence du drag atmosphérique sur les variables de Delaunay

Considérons le système hamiltonien :

$$\begin{cases} \dot{q} &= p \\ \dot{p} &= -\mathcal{H}_q + Y \end{cases}$$

$q = (x_1, x_2, x_3)^T$, le vecteur position en coordonnées cartésiennes.

où Y est une force non conservative. Remarquons que ce système hamiltonien est assimilable au système hamiltonien dont il sera question dans le cadre de ce mémoire et où la force non conservative sera la force de **drag**.

La théorie des systèmes hamiltoniens perturbés par une force non conservative (c.f [9]) nous permet de déterminer l'expression analytique des influences de cette force sur les variables de Delaunay.

On a :

$$\dot{L}_d = \frac{1}{n} [(-a\dot{u} \sin u)Y_1 + a\eta\dot{u}Y_2] \quad (4.1)$$

$$\dot{G}_d = (-a\eta \sin u)Y_1 + a(\cos u - e)Y_2 \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} \dot{H}_d &= (-a\eta \sin u \cos I)Y_1 + a(\cos u - e) \cos I Y_2 \\ &\quad + a \sin I (\eta \sin u \sin \omega - (\cos u - e) \cos \omega) Y_3 \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\dot{l}_d = -\frac{2a}{L} [(\cos u - e)Y_1 + \eta \sin u Y_2] - \frac{G}{L}(\dot{g}_d + \frac{H}{G}\dot{h}_d) \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} \dot{g}_d &= \frac{a}{eL(1 - e \cos u)} [-\eta(1 - e \cos u + \sin^2 u)Y_1 \\ &\quad + \sin u(\cos u - e)Y_2] - \frac{H}{G}\dot{h}_d \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\dot{h}_d = \frac{1}{G \sin I} a(\eta \sin u \cos \omega + (\cos u - e) \sin \omega) Y_3 \quad (4.6)$$

où Y_1, Y_2, Y_3 sont les composantes de la force non conservative et $\eta = \sqrt{1 - e^2} = \frac{G}{L}$

4.2 Changement de repère et vitesse relative

Appliquons les résultats de la section précédente à notre cas *i.e* lorsque la force non conservative est la force de drag et a pour expression :

$$\vec{F} = \alpha \rho(f) v_r^2 \vec{\mathbf{u}} = \alpha \rho(f) v_r (\vec{v} - \vec{v}')$$

avec $\alpha = -\frac{1}{2} \frac{A}{m} C_D$, v_r est la vitesse relative du satellite par rapport à l'atmosphère supposée tourner avec la même vitesse angulaire que celle de la Terre, v' la vitesse d'une particule de l'atmosphère et $\vec{\mathbf{u}}$ un vecteur unité dans la direction du mouvement. Le paramètre C_D est le coefficient de frottement aérodynamique et le rapport A/m correspond au rapport de la surface efficace de l'objet étudié sur sa masse. Le terme $\rho(f)$ correspond quant à lui à la densité atmosphérique dépendant implicitement de l'altitude au travers de l'anomalie vraie f .

Dans le but de simplifier les équations, considérons un changement de repère de sorte à nous ramener dans le plan de l'orbite du satellite $(\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2)$. $\vec{\varepsilon}_3$ étant un vecteur perpendiculaire à ce plan. Ceci peut être fait puisque les relations (4.1) à (4.6) sont obtenues à partir de produits scalaires (non démontré ici) et sachant que le produit scalaire est invariant par rapport à tout changement orthonormé de repère.

Rappelons que les coordonnées dans le plan de l'orbite du satellite sont :

$$\begin{cases} x'_1 &= r \cos f &= a(\cos u - e) &\stackrel{Not}{=} \xi \\ x'_2 &= r \sin f &= a\eta \sin u &\stackrel{Not}{=} \zeta \\ x'_3 &= 0 \end{cases}$$

Nous avons :

$$\begin{aligned} \vec{\varepsilon}_1 &= \cos \omega \vec{e}_1 + \sin \omega \cos I \vec{e}_2 + \sin \omega \sin I \vec{e}_3 \\ \vec{\varepsilon}_2 &= -\sin \omega \vec{e}_1 + \cos \omega \cos I \vec{e}_2 + \cos \omega \sin I \vec{e}_3 \\ \vec{\varepsilon}_3 &= -\sin I \vec{e}_2 + \cos I \vec{e}_3 \end{aligned}$$

La matrice correspondant au changement de repère est alors :

$$[id]_{\varepsilon}^e = \begin{pmatrix} \cos \omega & -\sin \omega & 0 \\ \sin \omega \cos I & \cos \omega \cos I & -\sin I \\ \sin \omega \sin I & \cos \omega \sin I & \cos I \end{pmatrix}$$

Nous pouvons dès à présent déterminer :

$$\begin{aligned}
[\vec{r}]^e &= [id]_e^e [\vec{r}]^e = (x_1, x_2, x_3)^T \\
[\vec{r}']^e &= [id]_e^e [\vec{r}']^e \\
&= \begin{pmatrix} \cos \omega & \sin \omega \cos I & \sin \omega \sin I \\ -\sin \omega & \cos \omega \cos I & \cos \omega \sin I \\ 0 & -\sin I & \cos I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R \cos \theta \\ R \sin \theta \\ x_3 \end{pmatrix} \\
[\vec{v}]^e &= \begin{pmatrix} \cos \omega & \sin \omega \cos I & \sin \omega \sin I \\ -\sin \omega & \cos \omega \cos I & \cos \omega \sin I \\ 0 & -\sin I & \cos I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -R \sin \theta \dot{\theta} \\ R \cos \theta \dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos \omega (-R \sin \theta) \dot{\theta} + \sin \omega \cos I (R \cos \theta \dot{\theta}) \\ \sin \omega R \sin \theta \dot{\theta} + \cos \omega \cos I R \cos \theta \dot{\theta} \\ -R \cos \theta \sin I \dot{\theta} \end{pmatrix} \tag{4.7}
\end{aligned}$$

Sachant que :

$$\begin{cases} x_1 = \xi \cos \omega - \zeta \sin \omega & = R \cos \theta \\ x_2 = \xi \sin \omega \cos I + \zeta \cos \omega \cos I & = R \sin \theta \end{cases}$$

et par (4.7), nous pouvons déterminer chacune des composantes de v' .

Nous avons :

$$\begin{aligned}
v'_1 &= -(\xi \sin \omega + \zeta \cos \omega) \cos I \cos \omega \dot{\theta} + (\xi \cos \omega - \zeta \sin \omega) \sin \omega \cos I \dot{\theta} \\
&= -\zeta \cos I \dot{\theta}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v'_2 &= (\xi \sin \omega + \zeta \cos \omega) \cos I \sin \omega \dot{\theta} + (\xi \cos \omega - \zeta \sin \omega) \cos I \cos \omega \dot{\theta} \\
&= \xi \cos I \dot{\theta}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v'_3 &= -(\xi \cos \omega - \zeta \sin \omega) \sin I \dot{\theta} \\
&= (\zeta \sin \omega - \xi \cos \omega) \sin I \dot{\theta}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v'^2 &= \dot{\theta}^2 [(\zeta^2 + \xi^2) \cos^2 I + (\zeta^2 \sin^2 \omega + \xi^2 \cos^2 \omega - 2\xi\zeta \sin \omega \cos \omega) \sin^2 I] \\
&\approx \mathcal{O}(d^2) \quad \text{avec } d \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\dot{\theta} \eta \cos I}{n}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_r^2 &= \langle \vec{v} - \vec{v}' | \vec{v} - \vec{v}' \rangle \\ &= v^2 - 2 \langle \vec{v} | \vec{v}' \rangle + \vec{v}'^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v^2 &= a^2 \sin^2 u \dot{u} + a^2 \cos^2 u \eta^2 \dot{u} \\ &= \frac{a^2 n^2}{(1 - e \cos u)^2} (\sin^2 u + \cos^2 u - e^2 \cos^2 u) \\ &= \frac{n^2 a^2}{1 - e \cos u} (1 + e \cos u) \\ &= \frac{n^2 a^2 \gamma^2}{\eta^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \vec{v} | \vec{v}' \rangle &= v_1 v'_1 + v_2 v'_2 + v_3 v'_3 \\ &= (-a \sin u \dot{u}) (-\zeta \cos I \dot{\theta}) + (a \cos u \eta \dot{u}) (\xi \cos I \dot{\theta}) \\ &= \frac{a^2 n}{1 - e \cos u} \cos I \dot{\theta} (\eta \sin^2 u + \eta \cos^2 u - \eta e \cos u) \\ &= a^2 n \cos I \dot{\theta} \eta \\ &= a^2 n^2 \frac{\cos I \eta \dot{\theta}}{n} \\ &= a^2 n^2 d \end{aligned}$$

On a dès lors :

$$\begin{aligned} v_r^2 &= v^2 - 2 \langle \vec{v} | \vec{v}' \rangle + \mathcal{O}(d^2) \\ &= \frac{n^2 a^2 \gamma^2}{\eta^2} - 2a^2 n^2 d + \mathcal{O}(d^2) \\ &= a^2 n^2 \left(\frac{\gamma^2}{\eta^2} - 2d \right) + \mathcal{O}(d^2) \end{aligned} \tag{4.8}$$

4.3 Moyennisation

Etant en mesure de calculer la dérivée des variables de Delaunay correspondant à l'influence du freinage atmosphérique, nous devons éliminer les courtes périodes. La moyennisation se faisant par rapport à l'anomalie moyenne, et les expressions présentes dans l'article de référence (c.f [6]) étant des intégrales par rapport à l'anomalie vraie, nous devons effectuer le changement de variable bien connu :

$$d\ell = \frac{\eta^3}{(1 + e \cos f)^2} df = \frac{1}{\eta} \left(\frac{r}{a} \right)^2 df$$

Nous savons déjà que les coordonnées dans le plan de l'orbite du satellite sont :

$$\begin{cases} x'_1 &= r \cos f &= a(\cos E - e) &\stackrel{Not}{=} \xi \\ x'_2 &= r \sin f &= a\eta \sin E &\stackrel{Not}{=} \zeta \\ x'_3 &= 0 \end{cases}$$

Nous pouvons en déduire que :

$$\frac{r}{a} = 1 - e \cos E = \frac{\eta^2}{1 + e \cos f}$$

ainsi que :

$$\frac{1 + e \cos E}{1 - e \cos E} = \frac{\gamma^2}{\eta^2}$$

où, par définition : $\gamma = \sqrt{1 + 2e \cos f + e^2}$

Déterminons dès à présent sur deux exemples, les expressions dont nous aurons besoin ultérieurement dans la construction du mapping.

4.3.1 Moyennisation de \dot{h}_d

L'équation (4.6) nous donne :

$$\begin{aligned} \dot{h}_d &= \frac{1}{G \sin I} a (\eta \sin E \cos \omega + (\cos E - e) \sin \omega) \alpha \rho v_r (-v'_3) \quad v_3 = 0 \\ &= \frac{a \alpha \rho v_r}{L \eta \sin I} [\eta \sin E \cos \omega + (\cos E - e) \sin \omega] \dot{\theta} \sin I \\ &\quad \times (\xi \cos \omega - \zeta \sin \omega) \\ &= \frac{a^2 \alpha \rho v_r \dot{\theta}}{L \eta} (\eta \sin E \cos \omega + (\cos E - e) \sin \omega) \\ &\quad \times ((\cos E - e) \cos \omega - \eta \sin E \sin \omega) \\ &= \frac{a^2 \alpha \rho v_r \dot{\theta}}{L \eta} [\eta \sin E (\cos E - e) \cos 2\omega - \eta^2 \sin^2 E \cos \omega \sin \omega \\ &\quad + (\cos^2 E + e^2 - 2e \cos E) \sin \omega \cos \omega] \\ &= \frac{a^2 \alpha \rho v_r \dot{\theta}}{L \eta} \left[\cos 2\omega \eta \sin E (\cos E - e) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sin 2\omega}{2} (\cos^2 E + e^2 - 2e \cos E - \sin^2 E + e^2 \sin^2 E) \right] \end{aligned}$$

On peut dès lors calculer l'élément moyennisé correspondant :

$$\begin{aligned}
\langle \dot{h}_d \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \dot{h}_d d\ell \\
&= \frac{1}{2\pi} \frac{a^2 \alpha \dot{\theta}}{L\eta} \int_0^{2\pi} \rho v_r \eta \frac{r}{a\eta} \sin f \frac{r}{a} \cos f \times \cos 2\omega \frac{\eta^3}{(1 + e \cos f)^2} df \\
&\quad + \frac{1}{2\pi} \frac{a^2 \alpha \dot{\theta}}{L\eta} \int_0^{2\pi} \rho v_r \frac{\sin 2\omega}{2} \underbrace{(\dots)}_{\stackrel{\text{not}}{=} A} \frac{\eta^3}{(1 + e \cos f)^2} df \\
&= \frac{1}{2\pi} \frac{a^2 \alpha \dot{\theta}}{L\eta} \int_0^{2\pi} \rho v_r \frac{1}{\eta} \left(\frac{r}{a}\right)^4 \frac{\sin 2f}{2} \cos 2\omega df \\
&\quad + \frac{1}{2\pi} \frac{a^2 \alpha \dot{\theta}}{L\eta} \int_0^{2\pi} \rho v_r \frac{\sin 2\omega}{2} (\dots) \frac{1}{\eta} \left(\frac{r}{a}\right)^2 df \tag{4.9}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{où } A &= \underbrace{\cos^2 E + e^2 - 2e \cos E}_{(\cos E - e)^2 = \left(\frac{r}{a}\right)^2 \cos^2 f} - \underbrace{\sin^2 E}_{\left(\frac{r}{a}\right)^2 \frac{1}{\eta}} + e^2 \sin^2 E = \left(\frac{r}{a}\right)^2 \cos 2f \\
&\quad \underbrace{\left(\frac{r}{a}\right)^2 \cos^2 f + \left(\frac{r}{a}\right)^2 \frac{1}{\eta} (e^2 - 1)}_{\left(\frac{r}{a}\right)^2 \cos^2 f + \left(\frac{r}{a}\right)^2 (-1)}
\end{aligned}$$

Remarquons que $\sin 2f$ est une fonction impaire et que par conséquent, le premier terme du second membre de l'expression (4.9) s'annule.

$$\begin{aligned}
\langle \dot{h}_d \rangle &= \frac{1}{2\pi} \frac{a^2 \alpha \dot{\theta}}{L\eta} \frac{1}{\eta} \int_0^{2\pi} \rho(f) \frac{\sin 2\omega}{2} v_r \left(\frac{r}{a}\right)^4 \cos 2f df \\
&\quad \text{Sachant que par (4.8), } v_r = \left[a^2 n^2 \left(\frac{\gamma^2}{\eta^2} - 2d \right) \right]^{1/2}, \text{ on a :} \\
&= \frac{1}{2\pi} \frac{a^2 \alpha \dot{\theta}}{L\eta^2} a n \frac{1}{\eta} \int_0^{2\pi} \rho(f) \left[1 - \frac{1}{2} 2d \frac{\eta^2}{\gamma^2} \right] \gamma \times \frac{\sin 2\omega}{2} \left(\frac{r}{a}\right)^4 \cos 2f df
\end{aligned}$$

Ceci étant obtenu en considérant le développement en série de Taylor de $v_r(d)$ en $d = 0$ et en négligeant les termes $\mathcal{O}(d^2)$

Il reste alors :

$$= \boxed{\frac{1}{2\pi} \frac{\alpha \dot{\theta} a}{\eta^3} \sin 2\omega \int_0^\pi \rho(f) \left(\frac{r}{a}\right)^4 \cos 2f \gamma \left[1 - d \frac{\eta^2}{\gamma^2} \right] df}$$

4.3.2 Moyennisation de \dot{L}_d

L'équation (4.1) nous donne :

$$\begin{aligned}\dot{L}_d &= \frac{1}{n} \left[(-a\dot{E} \sin E) Y_1 + a\eta \cos E \dot{E} Y_2 \right] \\ &= \frac{a\dot{E}}{n} \alpha \rho v_r \left[-\sin E (v_1 - v'_1) + \eta \cos E (v_2 - v'_2) \right]\end{aligned}$$

Rappelons que :

$$\left| \begin{array}{l} v_1 = -a \sin E \dot{E} \\ v_2 = a \cos E \eta \dot{E} \\ v_3 = 0 \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{l} v'_1 = -a\eta \sin E \cos I \dot{\theta} \\ v'_2 = -(\cos E - e) \cos I \dot{\theta} \\ v'_3 = (a\eta \sin E \sin \omega - a(\cos E - e) \cos \omega) \sin I \dot{\theta} \end{array} \right|$$

$$\begin{aligned}\dot{L}_d &= \frac{a^2 n}{n(1 - e \cos E)} \alpha \rho v_r \left[-\sin^2 E (-\dot{E}^2 + \eta \cos I \dot{\theta}) \right. \\ &\quad \left. + \eta \cos E \left(\dot{E} \eta \cos E - (\cos E - e) \cos I \dot{\theta} \right) \right]\end{aligned}$$

$$\text{Ceci sachant que } \dot{E} = \frac{n}{1 - e \cos E}$$

$$\begin{aligned}&= \frac{a^2 n}{(1 - e \cos E)^2} \alpha \rho v_r (\sin^2 E + \cos^2 E - e^2 \cos^2 E) \\ &\quad + \frac{a^2}{(1 - e \cos E)} \alpha \rho v_r \eta \cos I \dot{\theta} (-\sin^2 E - \cos^2 E + e \cos E) \\ &= \frac{a^2 n}{1 - e \cos E} \alpha \rho v_r (1 + e \cos E) - a^2 \eta \cos I \dot{\theta} \alpha \rho v_r\end{aligned}$$

L'élément moyennisé associé est alors :

$$\begin{aligned}
\langle \dot{L}_d \rangle &= \frac{1}{2\pi} a^2 n \alpha \int_0^{2\pi} \rho v_r \frac{1 + e \cos E}{1 - e \cos E} d\ell \\
&\quad - \frac{1}{2\pi} \alpha a^2 \eta \cos I \dot{\theta} \int_0^{2\pi} \rho v_r d\ell \\
&= \frac{1}{2\pi} a^2 n \alpha \int_0^{2\pi} \rho \frac{\gamma}{\eta} \left(1 - d \frac{\eta^2}{\gamma^2} \right) \frac{\gamma^2}{\eta^2} \frac{1}{\eta} \left(\frac{r}{a} \right)^2 df \\
&\quad - \frac{1}{2\pi} \alpha a^2 \frac{1}{\eta} \cos I \dot{\theta} \int_0^{2\pi} \rho \frac{\gamma}{\eta} \left(1 - d \frac{\eta^2}{\gamma^2} \right) \frac{1}{\eta} \left(\frac{r}{a} \right)^2 df \\
&= \frac{1}{2\pi} \frac{a^3 n^2 \alpha}{\eta^2} \int_0^{2\pi} \gamma \left(\frac{\gamma^2}{\eta^2} - d \right) \rho \left(\frac{r}{a} \right)^2 df \\
&\quad - \frac{1}{2\pi} \alpha a^2 \frac{\cos I}{n} \dot{\theta} \frac{\eta}{\eta} \int_0^{2\pi} a n^2 \frac{\gamma}{\eta} \left(1 - d \frac{\eta^2}{\gamma^2} \right) \rho \left(\frac{r}{a} \right)^2 df \\
&= \frac{1}{2\pi} \frac{a^3 n^2 \alpha}{\eta^2} \int_0^{2\pi} \gamma \left(\frac{\gamma^2}{\eta^2} - d \right) \rho \left(\frac{r}{a} \right)^2 df \\
&\quad - \frac{2}{2\pi} \alpha a^3 n^2 \frac{d}{\eta^3} \int_0^\pi \gamma \left(1 - \frac{d \eta^2}{\gamma^2} \right) \rho \left(\frac{r}{a} \right)^2 df
\end{aligned}$$

En négligeant de nouveau les termes $\mathcal{O}(d^2)$, on obtient :

$$= \boxed{\frac{1}{\pi} \frac{\mu \alpha}{\eta^2} \int_0^\pi \gamma \left(\frac{\gamma^2}{\eta^2} - 2d \right) \rho(f) \left(\frac{r}{a} \right)^2 df}$$

Chapitre 5

Les grandes lignes de l'algorithme

Sommaire

5.1	Les mappings symplectiques	34
5.2	Le choix du mapping	34
5.3	Perturbation due au potentiel terrestre	36
5.3.1	La partie zonale	36
5.3.2	La partie tesserales	37
5.4	Pression de radiation solaire	39
5.5	Perturbation Luni-solaire	40
5.6	Effet de traînée	40
5.6.1	Le modèle atmosphérique	41
5.6.2	Moyennisation des équations de Gauss	43

5.1 Les mappings symplectiques

Les mappings symplectiques sont des méthodes d'intégration numérique utilisées dans le cadre des systèmes hamiltoniens.

Dans le cadre des systèmes hamiltoniens, nous savons que la valeur de l'énergie est en général conservée. Nous savons également que le mapping $(q, p)_{t=0} \rightsquigarrow (q', p')_{t=\tau}$ le long de la solution est symplectique. En d'autres termes, le flot hamiltonien peut être considéré comme une transformation complètement canonique.

Lorsque nous appliquons une méthode d'intégration numérique conventionnelle à un système hamiltonien, on observe une amplification systématique de la constante d'énergie et de ce fait, une excitation de la solution. **Cette excitation artificielle rend l'intégration sur de longues périodes peu fiable.**

Suite à ces deux constatations, il est tout naturelle de désirer avoir à notre disposition des méthodes d'intégration qui vérifient ces propriétés. Malheureusement, il ne peut exister de telles méthodes dans le cas général de systèmes hamiltoniens non-intégrables¹. Comme compromis, on s'intéressera alors aux mappings conservant uniquement la structure canonique exactement comme le flot hamiltonien de départ. Ce type de mappings est dit *symplectique*.

Malgré le fait que de manière générale l'énergie du système n'est pas conservée, les mappings symplectiques possèdent quand même un avantage. En effet, on peut montrer que, contrairement aux méthodes d'intégration traditionnelles, l'erreur commise sur l'énergie n'a pas d'accroissement séculaire. De même, l'erreur commise sur les positions s'accroît linéairement par rapport au temps alors que l'on observe un accroissement quadratique pour des méthodes classiques ! (c.f [1],[3],[4])

5.2 Le choix du mapping

Le coeur de l'algorithme SYMP SAT 2 est basé sur le mapping implicite du second ordre "midpoint method" (c.f Annexe A.2), connu également comme l'intégrateur de "Gauss-Legendre à un étage" ainsi que sous le nom d'intégrateur "Leap frog".

$$\begin{cases} \mathbf{q}^{(n+1)} &= \mathbf{q}^{(n)} + \tau f\left(\frac{1}{2}(\mathbf{q}^{(n)} + \mathbf{q}^{(n+1)}), t^{(n)} + \frac{1}{2}\tau\right) \\ t^{(n+1)} &= t^{(n)} + \tau \end{cases}$$

Le pas du mapping τ est pris, par défaut, égal à la période orbitale du satellite. On pourrait également choisir le temps sidéral θ comme pas d'intégration. Les composantes du vecteur \mathbf{q} sont les variables non singulières et canoniques de Poincaré reliées aux variables de Delaunay (L, G, H, ℓ, g, h) par les relations :

$$\begin{array}{llll} q_1 &= x_1 &= \ell + g + h & q_4 &= X_1 &= L \\ q_2 &= x_2 &= -\sqrt{2(L-G)} \sin(g+h) & q_5 &= X_2 &= \sqrt{2(L-G)} \cos(g+h) \\ q_3 &= x_3 &= -\sqrt{2(G-H)} \sin h & q_6 &= X_3 &= \sqrt{2(G-H)} \cos h \end{array}$$

¹Ge & Marsden, 1988

où, rappelons le, ℓ désigne l'anomalie moyenne, g l'argument du périégée et h la longitude du noeud ascendant alors que L, G, H correspondent respectivement aux moments conjugués. On a $L = \sqrt{\mu a}$, $G = \sqrt{\mu a(1 - e^2)}$ et $H = G \cos I$. Il est également utile de remarquer que $L - G$ est proportionnel à e^2 et $G - H$ au $\sin^2 I/2$.

Ce choix de variables canoniques cartésiennes permet d'éviter les problèmes liés aux petites excentricités et petites inclinaisons. La fonction $f(\mathbf{q}, t)$ est la somme d'une partie hamiltonienne \mathcal{H} indépendante du temps et d'une partie \mathcal{D} liée au frottement que provoque l'atmosphère sur le satellite.

La partie hamiltonienne est

$$\mathcal{H}_i = \begin{cases} \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial X_i} & \text{pour } 1 \leq i \leq 3 \\ -\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial x_{i-3}} & \text{pour } 4 \leq i \leq 6 \end{cases}$$

où \mathcal{K} est la fonction hamiltonienne moyennée pour enlever les termes de courtes périodes. On ne veut, en effet, intégrer numériquement que les variations séculaires et à longues périodes. Il faut donc construire un système différentiel ne contenant plus aucune variation à courte période. Cette méthode est classique lorsque l'on veut étudier le comportement à long terme d'un système, ce qui est bien notre cas. Ce qui justifie le choix du pas d'intégration du mapping.

Dans le cas particulier où l'on ne considère que la partie hamiltonienne, on peut montrer que le mapping considéré est symplectique (c.f Annexe A.3) et satisfait donc à nos exigences en ce qui concerne l'intégration sur de longues périodes.

Bien que nous utilisons les variables de Poincaré, il est plus facile d'exprimer les membres de droite des équations différentielles en terme de variables de Delaunay. Dans la pratique, on évaluera d'abord les quantités $\dot{L}, \dot{\ell}, \dots$ etc, et on utilisera les relations suivantes pour reconstruire le \dot{q}_i :

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 = f_1 &= \dot{\ell} + \dot{g} + \dot{h} \\ \dot{q}_2 = f_2 &= \frac{x_2}{x_2^2 + X_2^2}(\dot{L} - \dot{G}) - X_2(\dot{g} + \dot{h}) \\ \dot{q}_3 = f_3 &= \frac{x_3}{x_3^2 + X_3^2}(\dot{G} - \dot{H}) - X_3\dot{h} \\ \dot{q}_4 = f_4 &= \dot{L} \\ \dot{q}_5 = f_5 &= \frac{X_2}{x_2^2 + X_2^2}(\dot{L} - \dot{G}) + x_2(\dot{g} + \dot{h}) \\ \dot{q}_6 = f_6 &= \frac{X_3}{x_3^2 + X_3^2}(\dot{G} - \dot{H}) + x_3\dot{h} \end{aligned} \tag{5.1}$$

5.3 Perturbation due au potentiel terrestre

Comme je l'ai rappeler au Chapitre 2, l'influence du géopotential découle d'une fonction hamiltonienne \mathcal{K}_G . Cette fonction est une somme de trois fonctions :

$$\mathcal{K}_G = \mathcal{K}_0 + \mathcal{K}_Z + \mathcal{K}_T$$

où $\mathcal{K}_0 = -\frac{1}{2}\mu^2 L^{-2}$ est la fonction hamiltonienne du problème des deux corps, \mathcal{K}_T la partie tesserales, et \mathcal{K}_Z la partie zonale.

5.3.1 La partie zonale

La partie zonale \mathcal{K}_Z est de la forme

$$\mathcal{K}_Z = \mathcal{K}_{J_2} + \mathcal{K}_{J_2^2} + \mathcal{K}_{J_3} + \mathcal{K}_{J_4}$$

De manière à obtenir des résultats satisfaisants au niveau qualitatif, nous considérerons les harmoniques J_2, J_3 et J_4 dans l'hamiltonien de départ. Il est également important de ne pas oublier les termes en J_2^2 dans l'hamiltonien moyenné. Nous savons en effet que le coefficient J_2 est relativement grand dans le cas du potentiel terrestre. L'algorithme tiendra donc compte de ces principales harmoniques et on considérera également les termes en J_2, J_3 et J_4 dans l'hamiltonien moyenné.

Table 5.1 – Les coefficients zonaux

Coefficients	Valeur
J_2	0.00108263
J_3	$-2.5321530 \times 10^{-6}$
J_4	$-1.6109877 \times 10^{-7}$
J_5	$-2.3578565 \times 10^{-7}$
J_6	5.4316985×10^{-7}
J_7	$-3.3237637 \times 10^{-7}$

Chaque membre de l'hamiltonien moyenné \mathcal{K}_Z est obtenu par l'algorithme de Lie appliqué au système hamiltonien. Cet algorithme a été légèrement modifié pour l'occasion : nous savons en effet que la fonction génératrice qui apparaît dans l'algorithme de Lie résulte toujours d'une intégration par rapport à l'anomalie moyenne et est donc définie à une constante d'intégration $\omega(-, g, h, L, G, H)$ près. Cela signifie donc qu'il existe une infinité de transformations permettant d'éliminer l'anomalie moyenne. Les éléments moyennés sont donc quant à eux définis à des variations à

longue période près. Si on considère deux de ces transformations, l'une de fonction génératrice W_1 et l'autre de fonction génératrice $W_1^* = W_1 + \omega$ à l'ordre 1, il n'en résultera pas le même hamiltonien aux ordres suivants. Cela implique que, suivant le choix du générateur, certaines longues périodes seront soit conservées dans le nouveau système différentiel (donc dans les nouvelles variables) soit abandonnées dans le changement de variables. Dans le cadre d'une méthode semi-analytique, ce qui est bien notre cas, notre but n'est pas une intégration complète mais bien un filtrage des courtes périodes sans perte d'information concernant les longues périodes. La différence entre nouvelles et anciennes variables ne doit donc contenir que des termes à courtes périodes (c.f [2]). C'est donc dans cette optique que l'algorithme de Lie a été modifié.

Citons par exemple la fonction hamiltonienne \mathcal{K}_{J_2} obtenue par cette méthode :

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{J_2} = & \frac{3\mu^6 R_e^4}{16L^3 G^7} \left[-5 - 2\eta + \eta^2 + s^2(10 + 6\eta - \eta^2) \right. \\ & - s^4 \left(\frac{35}{8} + \frac{9}{2}\eta + \frac{5}{8}\eta^2 \right) \\ & \left. + s^2 e^2 \left(\frac{15}{2} - \frac{35}{4}s^2 - (4 - 5s^2) \left[\frac{\eta}{1+\eta} \right]^2 \right) \cos 2g \right] \end{aligned}$$

où $\eta = \frac{G}{L}$, s correspond au sinus de l'inclinaison et R_e est le rayon équatorial de la Terre. Les expressions de \mathcal{K}_{J_3} et \mathcal{K}_{J_4} peuvent être trouvées dans [2].

5.3.2 La partie tesserales

Bien que tous les termes dans la fonction hamiltonienne relative à la partie tesserales dépendent de l'anomalie moyenne ℓ en tant qu'argument, les résonances entre le moyen mouvement du satellite et la rotation de la Terre peuvent induire des effets périodiques de longue période. Dès lors, avant de commencer l'intégration d'un objet particulier, on vérifie l'ensemble des fréquences de tous les termes tesseraux, et pour celles inférieures à une valeur critique (fixée à $0.05|n|$ où n est le moyen mouvement), on stocke en mémoire les indices mkq correspondant de sorte à ne plus les considérer ultérieurement. On intégrera donc numériquement uniquement les harmoniques résonantes, les autres étant de moyenne nulle par rapport à l'anomalie moyenne ℓ . A ce niveau, les fréquences sont déterminées au moyen des expressions de Brouwer relatives à un hamiltonien de départ ne contenant que la perturbation en J_2 . Utilisons à présent l'expression du potentiel développée à la section 2.6 :

$$\mathcal{K}_Z = \frac{\mu^2}{L^2} \sum_{m=1}^N \sum_{k=-N}^N \sum_{q=-Q}^Q \gamma_{lm} (\bar{\mathbf{C}}_m^{kq} \cos \Psi + \bar{\mathbf{S}}_m^{kq} \sin \Psi)$$

où

$$\Psi = kg + (k + q)\ell + m(h - \theta) + (k - m)\frac{\pi}{2}$$

$$\gamma_{lm} = (-1)^{E[(l-m+1)/2]}$$

Remarquons que contrairement à l'expression (2.22), la sommation sur m commence à 1 puisque le cas zonal est traité séparément.

Rappelons que θ est le temps sidéral, N est le degré et l'ordre maximum des harmoniques dont on tient compte dans le développement, et Q est la plus grande puissance de l'excentricité retenue dans le développement. Les amplitudes \tilde{C}_m^{kq} et \tilde{S}_m^{kq} sont les *coefficients généralisés*, ils dépendent des coefficients normalisés $\tilde{C}_{l,m}$ ou $\tilde{S}_{l,m}$ respectivement, ainsi que des fonctions d'inclinaison et d'excentricité $F(I)$ et $G(e)$ (c.f section 2.6).

Les coefficients généralisés doivent être calculés à chaque itération de l'algorithme, ce qui rend la partie tessérale la plus coûteuse en temps de calcul. Les fonctions d'inclinaison et leurs dérivées peuvent être déterminées par des formules de récurrence². En ce qui concerne les fonctions d'excentricité et leurs dérivées, on doit avoir recours à une méthode d'approximation cubique (cubic spline approximation). D'autre part, certaines fonctions, principalement pour $G_{lmq}(e)$ avec $q \neq 0$, et pour $G'_{lmq}(e)$ avec $q \neq 1$, admettent l'approximation "quasi-quadratique" suivante sur l'intervalle $0 < e < 0.1$:

$$G_{lmq}(e) \approx e^{|q|}(A + Be^2)$$

où A et B sont deux constantes à ajuster. On peut montrer que cette approximation se comporte bien mieux que l'approximation cubique utilisée auparavant (Métris & Breiter). L'erreur commise sur l'évaluation des fonctions et de leur dérivée n'excède pas 10^{-4} pour $e < 0.1$, ou 10^{-2} pour $e < 0.9$.

Si l'orbite à intégrer possède une faible excentricité, on peut améliorer l'algorithme en modifiant la valeur critique de sélection des termes résonnants. Nous savons en effet qu'une orbite faiblement excentrique est moins susceptible d'être en résonance. On considère alors la nouvelle valeur critique :

$$|\dot{\Psi}_{mkq}| \leq 0.05ne^{|q|}$$

cette valeur étant inférieure à celle définie précédemment, une fréquence sera moins vite considérée comme résonante. On conservera donc moins d'harmoniques dans la partie tessérale.

Remarquons que l'algorithme n'est pas limité par le nombre d'harmoniques dont on peut tenir compte. Cependant, on ne considérera que les harmoniques jusqu'au degré 6 qui représentent la plupart des résonances.

²Gooding, 1971 ; Wnuk, 1986

5.4 Pression de radiation solaire

Sous plusieurs hypothèses simplificatrices concernant notamment la forme du satellite, la parallaxe ainsi que la surface efficace du satellite, on a pu déduire au Chapitre 3.1 l'hamiltonien moyennisé correspondant aux effets de pression de radiation solaire sur le satellite. On a :

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{\mathcal{R}} = & -\frac{3}{2}\sigma \left(\frac{a_s}{r_s}\right)^2 ae* \\ & (A_s[\cos h \cos g - \sin h \sin g \cos I] + \\ & B_s[\sin h \cos g + \cos h \sin g \cos I] + \\ & C_s[\sin g \sin I]) \end{aligned}$$

où

$$\sigma = \alpha \frac{\sum \chi}{m c}$$

α coefficient de réflectivité

\sum surface efficace perpendiculaire au rayonnement (exprimé en m^2)

m masse du satellite en kg

χ constante solaire en W/m^2

c vitesse de la lumière en m/s

Nous allons voir ultérieurement que la pression de radiation solaire produit essentiellement des variations à courtes et à longues périodes.

5.5 Perturbation Luni-solaire

Dans la section 3.2, nous avons déterminé la fonction hamiltonienne correspondant à la perturbation luni-solaire.

$$\mathcal{R} = -\frac{\mu_c}{r_c} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{r}{r_c}\right)^n P_n(\cos \psi)$$

De ce développement en série, nous ne conserverons que le terme en $n = 2$. Nous avons en effet que les termes pour $n \geq 3$ sont relativement petits du fait de la différence importante entre la distance géocentrique du satellite et la distance géocentrique du corps perturbateur. D'autre part, il est facile de voir que l'erreur commise suite à cette troncature est du même ordre de grandeur dans le cas de la Lune et dans le cas du Soleil. Nous avons en effet que les rapports μ_c/r_c^3 dans le cas de la Lune et du Soleil sont du même ordre de grandeur.

Une particularité importante de cette perturbation par rapport aux autres perturbations dont on a déjà tenu compte précédemment est l'introduction du temps dans l'hamiltonien. Nous savons en effet que la position du corps perturbateur varie avec

le temps. Dès lors, dans le but de contourner cette difficulté, nous considérerons les coordonnées du corps perturbateur comme constantes à chaque itération du mapping ; ces coordonnées sont obtenues par des tables d'éphémérides. D'autre part, la procédure de moyennisation se fera par une quadrature numérique pour ne pas se compliquer la tâche par de longs calculs analytiques.

L'hamiltonien moyennisé est donc :

$$\mathcal{K}_{L,S} = -\frac{\mu_c}{2\pi r_c^3} \int_0^{2\pi} r^2 P_2(\cos \Psi) d\ell$$

Puisque les coordonnées du satellite sont explicites en l'anomalie excentrique u , effectuons la quadrature par rapport à cette variable. Sachant que $\ell = u - e \sin u$, nous avons $d\ell = (1 - e \cos u) du$. D'autre part, $r = a(1 - e \cos u)$, ce qui nous donne la forme finale de l'hamiltonien moyennisé :

$$\mathcal{K}_{L,S} = -\frac{\mu\mu_c}{2\pi L^2 r_c} \int_0^{2\pi} r^3 P_2\left(\frac{x_1 x + y_1 y + z_1 z}{r r_c}\right) du$$

où $\mathbf{r}_c = (x_1, x_2, x_3)$ est le vecteur de coordonnées du corps perturbateur. Rappelons que cette expression découle également du fait que $\cos \Psi = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_c}{r r_c}$.

Remarquons que la norme du rayon vecteur \mathbf{r}_c est en dehors de l'intégrale, dénotant bien le fait que les coordonnées du corps perturbateur sont considérées comme constantes dans la quadrature. Il reste encore à préciser qu'il est possible de simplifier le modèle en considérant l'orbite du troisième corps comme étant circulaire.

5.6 Effet de traînée

Modéliser les effets de l'atmosphère sur le mouvement d'un satellite est assez compliqué. Les difficultés sont diverses : la répartition de densité de l'atmosphère n'est ni une fonction régulière de l'altitude ni du temps, la vitesse du satellite par rapport à l'atmosphère dépend fortement des vents présents dans la haute atmosphère, la forme du satellite doit également être prise en compte, etc... En plus de dépendre de l'altitude, la densité peut également dépendre de la position exacte du satellite. Dès lors, introduire les effets de traînée dans notre mapping devient une tâche difficile en ce qui concerne le choix entre simplicité et précision. Les modèles les plus précis sont des modèles dynamiques i.e que la densité atmosphérique est fonction non seulement de l'altitude mais également de la date et de différents paramètres physiques. On pourrait par exemple tenir compte de la périodicité de 11 ans concernant le cycle d'activité solaire. Nous savons en effet que lors de son activité maximum, le Soleil émet beaucoup plus d'énergie, la haute atmosphère devient alors plus dense et influence d'autant plus les satellites possédant une orbite basse.

Disons déjà que l'effet principal du freinage atmosphérique sera une décroissance séculaire du demi-grand axe.

5.6.1 Le modèle atmosphérique

Dans notre cas, on considérera un modèle statique tel que la fonction de densité ne dépende que de l'altitude. Il s'agit du modèle isotrope de Jacchia (Zarouatti, 1987) appliqué dans le cas $T_\infty = 1000 \text{ K}$. On utilise le fait que le graphe du logarithme de la densité par rapport à l'inverse de l'altitude, parmi beaucoup de graphes possibles, a la forme la plus intéressante. Par conséquent, on déduit l'approximation polynomiale suivante :

$$\rho \approx \exp \left[\sum_{k=0}^6 \rho_k h^{-k} \right] \quad (5.2)$$

pour quatre ensembles de coefficients ρ_k correspondant à différents niveaux d'altitude donnés dans la table 5.2. L'altitude h doit être exprimée en rayon terrestre et la densité ρ en kg/m^3 . Pour éviter une discontinuité dans la fonction de densité définie par le modèle, il est utile de rajouter une extension artificielle au delà de 2500 km d'altitude :

$$\rho \approx \exp \left[-40.286079738 + 1.1257144646 h^{-1} + 0.0366986362597 h^{-2} \right] \quad (5.3)$$

Cette fonction extrapole le dernier intervalle de la Table 5.2. L'approximation (5.2) garantit une erreur relative sur ρ inférieure à 0.006. La figure (5.1) permet de nous faire une idée de la décroissance de la densité par rapport à l'altitude.

	$90 \text{ km} \leq h < 106 \text{ km}$	$106 \text{ km} \leq h < 145 \text{ km}$
ρ_0	$-1.3406434381 \times 10^{-7}$	$-9.1686224796 \times 10^{-4}$
ρ_1	$-4.37708065323 \times 10^{-6}$	$-1.57383032232 \times 10^{-2}$
ρ_2	$-1.14409034942 \times 10^{-4}$	$-1.62264695031 \times 10^{-1}$
ρ_3	$-1.86957995044 \times 10^{-3}$	$9.3650399543 \times 10^{-3}$
ρ_4	$6.85875643618 \times 10^{-5}$	$-2.23242896163 \times 10^{-4}$
ρ_5	$-8.6911137319 \times 10^{-7}$	$2.50404424431 \times 10^{-6}$
ρ_6	$3.76518174127 \times 10^{-9}$	$-1.08704193356 \times 10^{-8}$
	$145 \text{ km} \leq h < 625 \text{ km}$	$625 \text{ km} \leq h < 2500 \text{ km}$
ρ_0	-50.0791319917	-35.8942971702
ρ_1	3.67281331277	-4.85833833795
ρ_2	$-2.49949862235 \times 10^{-1}$	3.14530525606
ρ_3	$1.01503611347 \times 10^{-2}$	$-7.68338977510 \times 10^{-1}$
ρ_4	$-2.38539888164 \times 10^{-4}$	$9.3678079868 \times 10^{-2}$
ρ_5	$3.00295970954 \times 10^{-6}$	$-5.5908801362 \times 10^{-3}$
ρ_6	$-1.55976696939 \times 10^{-8}$	$1.30299481588 \times 10^{-4}$

Table 5.2 – Coefficients du modèle atmosphérique approximé par l'équation (5.2)

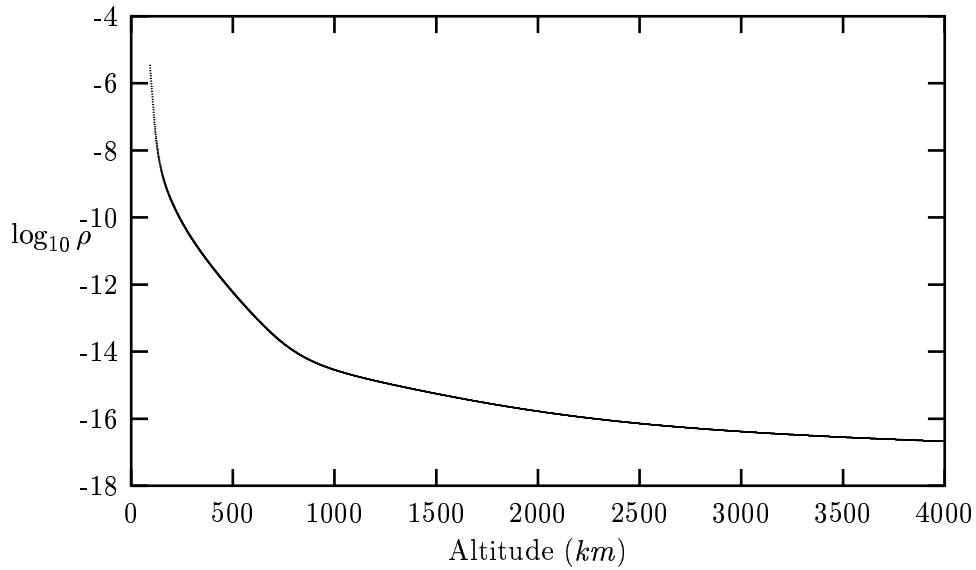


Figure 5.1 – Graphique du logarithme (en base 10) de la densité atmosphérique (kg/m^3) en fonction de l'altitude (km).

5.6.2 Moyennisation des équations de Gauss

Moyenniser les équations de Gauss relatives aux effets de traînée atmosphérique est une tâche pratiquement impossible par des méthodes purement analytiques qui seraient valides à la fois pour de petites et grandes excentricités. L'utilisation de quadratures numériques est alors le seul moyen de donner suffisamment de généralité à l'algorithme (Hoots & France, 1987), mais le temps de calcul nécessaire devient relativement élevé. Dès lors, en admettant une certaine perte de précision, on utilise une procédure combinée d'approximation basée sur des quadratures numériques dans le cas de faibles excentricités et sur une méthode d'estimation analytique pour de grandes excentricités.

Sous les hypothèses d'un satellite de forme sphérique en mouvement dans une atmosphère isotrope en rotation avec une vitesse angulaire égale à celle de la Terre, nous avons montré au Chapitre 4 que lorsque l'on néglige tous les termes en $\mathcal{O}(d^2)$, on obtient les équations de Gauss suivantes, relatives à l'influence sur les variables de Delaunay des effets de traînée :

$$\begin{aligned}
\langle \dot{L}_d \rangle &= \frac{\alpha\mu}{\eta^2} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \rho(f) Q_L(f) df \\
\langle \dot{G}_d \rangle &= \frac{\alpha\mu}{\eta} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \rho(f) Q_G(f) df \\
\langle \dot{H}_d \rangle &= c \langle \dot{G}_d \rangle - \frac{\alpha\mu\dot{\theta}s^2}{2\pi n\eta} \int_0^\pi \rho(f) [Q_H(f) + 2 \cos 2g P_H(f)] df \\
\langle \dot{l}_d \rangle &= 0 \\
\langle \dot{g}_d \rangle &= -c \langle \dot{h}_d \rangle \\
\langle \dot{h}_d \rangle &= \frac{\alpha\dot{\theta}a}{2\pi\eta^3} \sin 2g \int_0^\pi \rho(f) P_h(f) df
\end{aligned} \tag{5.4}$$

où

$$\begin{aligned}
Q_L(f) &= \gamma \left(\frac{\gamma^2}{\eta^2} - 2d \right) \left(\frac{r}{a} \right)^2 \\
Q_G(f) &= \gamma \left[1 - d \left(\frac{\eta^2}{\gamma^2} + \frac{r^2}{a^2\eta^2} \right) \right] \left(\frac{r}{a} \right)^2 \\
Q_H(f) &= \gamma \left(\frac{r}{a} \right)^4 \\
P_H(f) &= \gamma \left(\frac{r}{a} \right)^4 \cos 2f \\
P_h(f) &= \gamma \left(1 - d \frac{\eta^2}{\gamma^2} \right) \left(\frac{r}{a} \right)^4 \cos 2f \\
\gamma &= \sqrt{1 + 2e \cos f + e^2} \\
\alpha &= -\frac{1}{2} \frac{A}{m} C_D
\end{aligned}$$

où C_D est le coefficient de frottement aérodynamique, il est sans dimension et supposé constant. La densité ρ dépend implicitement de l'anomalie vraie f au travers de l'altitude h .

Tous les intégrands ρQ et ρP sont des fonctions paires de l'anomalie vraie f sur l'intervalle $-\pi < f < \pi$. Remarquons que $P(\pi/4) = P(3\pi/4) = 0$ alors que $Q(f)$ ne change pas de signe. Pour de petites excentricités, ρP est presque constant et ρP se comporte comme $\cos 2f$. A de basses altitudes, même une faible augmentation de l'excentricité intensifie l'action de la variation de densité atmosphérique. Dès lors, on observe un pic en $f = 0$ pour les valeurs des intégrands, voir Figure 5.2. De sorte à distinguer le cas "régulier" du cas "avec pic", on détermine le rapport des intégrands évalués au périhélie et à l'apogée respectivement. On suppose que les valeurs caractéristiques de ces rapports sont :

$$\left| \frac{\rho(0)Q(0)}{\rho(\pi)Q(\pi)} \right| = 50, \quad \left| \frac{\rho(0)P(0)}{\rho(\pi)P(\pi)} \right| = 300$$

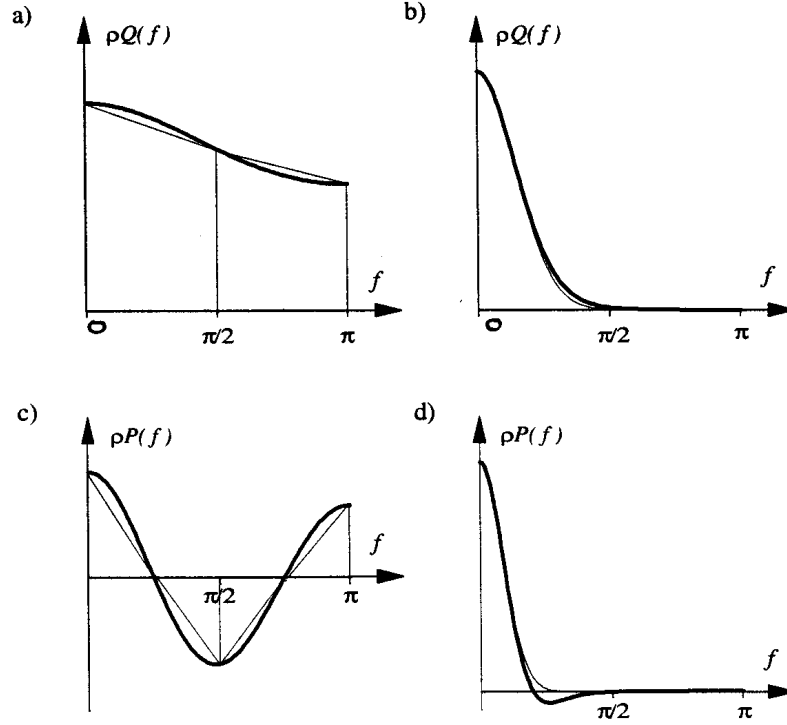


Figure 5.2 – Comportement des intégrands ρQ (en haut) et ρP (en bas) dans le cas régulier et “avec pic” (à gauche et à droite respectivement). (c.f [6])

1. Cas régulier pour ρQ :

L'estimation est basée sur la règle du trapèze.

Les valeurs suivantes des intégrands sont nécessaires :

$$\begin{aligned} Q_L(0) &= \eta^2[1 + e - 2d(1 - e)] \\ Q_L\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \eta^2\sqrt{1 + e^2}[1 + e^2 - 2d\eta^2] \\ Q_L(\pi) &= \eta^2[1 - e - 2d(1 + e)] \end{aligned} \tag{5.5}$$

et on a :

$$\int_0^\pi \rho(f) Q_L(f) df \approx \frac{\pi}{4} \left[\rho(0) Q_L(0) + 2\rho\left(\frac{\pi}{2}\right) Q_L\left(\frac{\pi}{2}\right) + \rho(\pi) Q_L(\pi) \right]$$

Remarquons que l'approximation est exacte lorsque $e = 0$

2. Cas régulier pour ρP :

$$\begin{aligned} P_h(0) &= (1-e)^4[1+e-d(1-e)] \\ P_h\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \eta^8(1+e^2)^{-1/2}[-1-e^2+d\eta^2] \\ P_h(\pi) &= (1+e)^4[1-e-d(1+e)] \end{aligned}$$

et on a :

$$\int_0^\pi \rho(f)P_h(f)df \approx \frac{\pi}{8} \left[\rho(0)P_h(0) + 2\rho\left(\frac{\pi}{2}\right)P_h\left(\frac{\pi}{2}\right) + \rho(\pi)P_h(\pi) \right]$$

Comme dans le cas précédent, l'approximation est exacte lorsque $e = 0$

3. Cas “avec pic” :

Aucune distinction ne doit être faite entre ρQ et ρP , puisque la valeur de l'intégrale est conditionnée essentiellement par la partie proche du pic comme le montre la Figure 5.2.

L'approximation de l'intégrale d'une fonction $y(x)$ ne possédant qu'un seul pic peut être donnée par³ :

$$\int_{x_m}^\infty y dx \approx \omega y(x_m) \sqrt{\frac{|y(x_m)|}{y''(x_m)}} \quad (5.6)$$

Cette approximation est basée sur la courbure de la fonction $y(x)$ au point x_m où la fonction atteint son maximum ou minimum. Cette formule peut être calibrée pour différents types de fonctions et si $w = \sqrt{\pi/2}$, l'équation (5.6) devient exacte pour une courbe de Gauss $y = \text{Cexp}(-kx^2)$. Cette méthode s'avère assez utile dans notre contexte. Pour ρQ_L , nous avons uniquement besoin de la valeur $\rho(0)Q_L(0)$ (c.f Equ. 5.5) ainsi que de la dérivée seconde :

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^2(\rho Q_L)}{df^2} \right|_{f=0} &= -\rho(0)e \left(\frac{1-e}{1+e} \right) [(1+e)(1-2e) \\ &\quad + 2d(1-e)(1+2e) + Q_L(0)P^*ah_m^{-2}] \end{aligned} \quad (5.7)$$

où h_m est l'altitude au périgée (exprimée en rayons terrestres), P^* est la dérivée logarithmique de la densité ρ prise par rapport à l'inverse de l'altitude et évaluée au périgée. Finalement, on trouve :

$$\int_0^\pi \pi \rho(f)Q_L(f)df \approx \sqrt{\frac{\pi}{2}} \rho(0)Q_L(0) \sqrt{\left| \frac{\rho(0)Q_L(0)}{d^2(\rho Q_L)/df^2|_{f=0}} \right|}$$

où l'on peut éventuellement simplifier $\rho(0)$ à l'intérieur de la racine carrée après substitution de (5.7).

³Zeldovich & Myškis 1976

Chapitre 6

L'algorithme - Applications

Sommaire

6.1	Les données numériques	48
6.2	Analyse de la précision et de la fiabilité de l'algorithme	50
6.3	Effets des différentes perturbations	53
6.4	le drag atmosphérique	57
6.5	Conservation de l'énergie	58
6.6	Code source et commentaires sur SYMPSAT 2	60
6.6.1	MAP410.FOR	60

Ayant à ma disposition les grandes lignes de l'algorithme ainsi que l'ensemble des concepts théoriques nécessaires à sa compréhension, il me semblait judicieux de vouloir disposer d'un tel programme dans le but de tester son efficacité, sa précision ainsi que sa fiabilité. D'autre part, il serait alors possible d'utiliser celui-ci afin de retrouver les résultats donnés à titre d'exemple dans l'article de référence ([6]). Nous avons alors fait la démarche de prendre contact avec les auteurs mêmes du programme **SYMPSAT 2** dont il est question dans cet article afin de pouvoir acquérir le code source relatif à celui-ci. Le code source correspondant à la sous-routine principale du programme se trouve à la section 6.6 de ce même chapitre. J'y ai rajouté une série de commentaires personnels permettant de se faire une idée de l'implémentation de la structure principale de l'algorithme.

6.1 Les données numériques

De sorte à vérifier la précision et la fiabilité de l'algorithme (et par conséquent son implémentation informatique), nous allons comparer les résultats de **SYMPSAT 2** avec deux ensembles de données TLE (NORAD 'Two Line Elements'). Ces données sont directement issues du site Internet du NORAD¹ (North American Aerospace Defense). Les fichiers de données sont, comme leur nom l'indique, constitués de deux lignes par élément de données. La première ligne contient essentiellement des données relatives au satellite en tant que tel (Numéro du satellite, identifiant international, etc) ainsi que le moment précis de la prise de données de cet élément alors que la deuxième ligne contient les données relatives à la position du satellite à cet instant (excentricité, inclinaison, anomalie moyenne, etc). Le format des fichiers est présenté dans la Figure 6.1 pour la première ligne à la Figure 6.2 pour la seconde.

A titre d'exemple, voici un extrait d'un fichier de données contenant quatre éléments :

```
1 14129U 83 58 B 86227.98835107 .00000023 00000-0 00000+0 0 2589
2 14129 26.7434 64.6760 6027703 135.9438 292.2412 2.05873278 27173
1 14129U 83 58 B 86247.89144679 .00000031 00000-0 00000+0 0 2598
2 14129 26.8464 61.4403 6028535 141.3397 283.1351 2.05872549 27581
1 14129U 83 58 B 86254.20176238 .00000034 00000-0 99999-4 0 2602
2 14129 26.8407 60.4025 6029624 143.0696 279.9368 2.05871302 27710
1 14129U 83 58 B 86257.59954117 .00000034 00000-0 99999-4 0 2629
2 14129 26.7785 59.9374 6034435 143.7350 278.8251 2.05879446 27781
...
```

Comme on peut le voir, le premier élément de données date du 227^{ème} jour de l'année 1986. Le satellite correspondant à ces éléments de données possédait une inclinaison de 26.7434° ainsi qu'une excentricité de 0.6027703 lors de la première prise de données.

¹<http://celestrak.com/NORAD/elements/>

Colonne	Description
01	Numéro de la ligne de l'élément de données
03-07	Numéro de satellite
08	Classification (U=non classifié)
10-11	Identifiant international (deux derniers chiffres de l'année)
12-14	Identifiant international (numéro de lancement de l'année)
15-17	Identifiant international (<i>Piece of the launch</i>)
19-20	Année (deux derniers chiffres de l'année)
21-32	Jour de l'année et partie fractionnaire du jour
34-43	Dérivée première du moyen mouvement
45-52	Dérivée seconde du moyen mouvement
54-61	Terme de drag BSTAR
63	Type d'éphéméride
65-68	Numéro de l'élément
69	Checksum (Modulo 10)

Figure 6.1 – Format des données TLE - **Ligne 1**

Colonne	Description
01	Numéro de la ligne de l'élément de données
03-07	Numéro du satellite
09-16	Inclinaison [degrés]
18-25	Ascension droite du noeud ascendant
27-33	Excentricité
35-42	Argument du périégée [degrés]
44-51	Anomalie moyenne [degrés]
53-63	Moyen mouvement [Nb de révolutions par jour]
64-68	Nombre de révolutions jusqu'à présent
69	Checksum (Modulo 10)

Figure 6.2 – Format des données TLE - **Ligne 2**

6.2 Analyse de la précision et de la fiabilité de l'algorithme

Le premier satellite étudié est AO-10 (14129/8358B), un satellite radio hautement elliptique. Le second est le satellite Cosmos 398 (4966/7116A), un satellite possédant un faible périégée ainsi qu'une orbite excentrique et qui se désintégra dans l'atmosphère fin de l'année 1995. Ces deux satellites ont été choisis parce que le premier permet d'effectuer une comparaison sur un intervalle de temps relativement long (10 ans), alors que le second est un bon exemple pour tester l'effet du drag atmosphérique sur celui-ci.

Lors de la comparaison, la valeur du coefficient A/m m'était inconnue² ; pour le satellite AO-10, j'ai considéré également³ $A/m = 0.1 \text{ m}^2/\text{kg}$ alors que pour le satellite Cosmos 398, il s'est avéré que, contrairement à la valeur utilisée par G. Métris & S. Breiter, les meilleurs résultats étaient obtenus dans mon cas avec la valeur $A/m = 0.00261$. Cette différence étant certainement liée au fait que je n'avais pas à ma disposition les valeurs des autres coefficients tels que le coefficient de réflectivité pour lesquels j'ai dû également effectuer une estimation quelque peu arbitraire.

Pour les deux satellites, les valeurs du premier élément de données TLE ont été considérées comme les conditions initiales pour le lancement de l'algorithme. Les figures (6.3) correspondent à la comparaison des résultats de l'algorithme avec la prise de données TLE pour l'excentricité et l'inclinaison respectivement dans le cas du satellite AO-10. Ces deux figures permettent de se rendre compte de la précision de l'algorithme ; dans le cas de l'inclinaison, on constate que la précision de SYMPSAT2 est du même niveau que l'erreur commise lors de la prise de données. Les différences périodiques observées dans le cas de l'excentricité sont dues au fait que certains termes de longue période et d'origine solaire sont enlevés lors de la prise de données TLE. Dans le cas du satellite Cosmos 398 (Figure 6.4), la situation est inversée. En effet, on constate que des variations périodiques sont absentes des résultats donnés par l'algorithme. Cette différence est certainement liée au fait que l'on a considéré un modèle atmosphérique relativement simplifié dans la construction de l'algorithme.

D'autre part, contrairement à ce qui a été fait dans l'article de référence (c.f [6]), j'ai également effectué l'intégration sur une période relativement longue puisque j'avais à ma disposition les données TLE correspondant à cette période. On observe alors une légère différence supplémentaire (bien visible sur le premier graphe de la Figure 6.4 dans l'intervalle de temps 500-3000 jours) entre les données TLE et les résultats fournis par l'algorithme. Cette différence pouvant peut-être être expliquée par une éventuelle correction (rehaussement) de l'orbite du satellite par des moteurs d'attitude ; ce qui est chose courante dans le domaine des satellites artificiels.

²Pour rappel, il s'agit du rapport de la surface efficace du satellite sur sa masse (m^2/kg)

³Métris & Breiter (c.f [6])

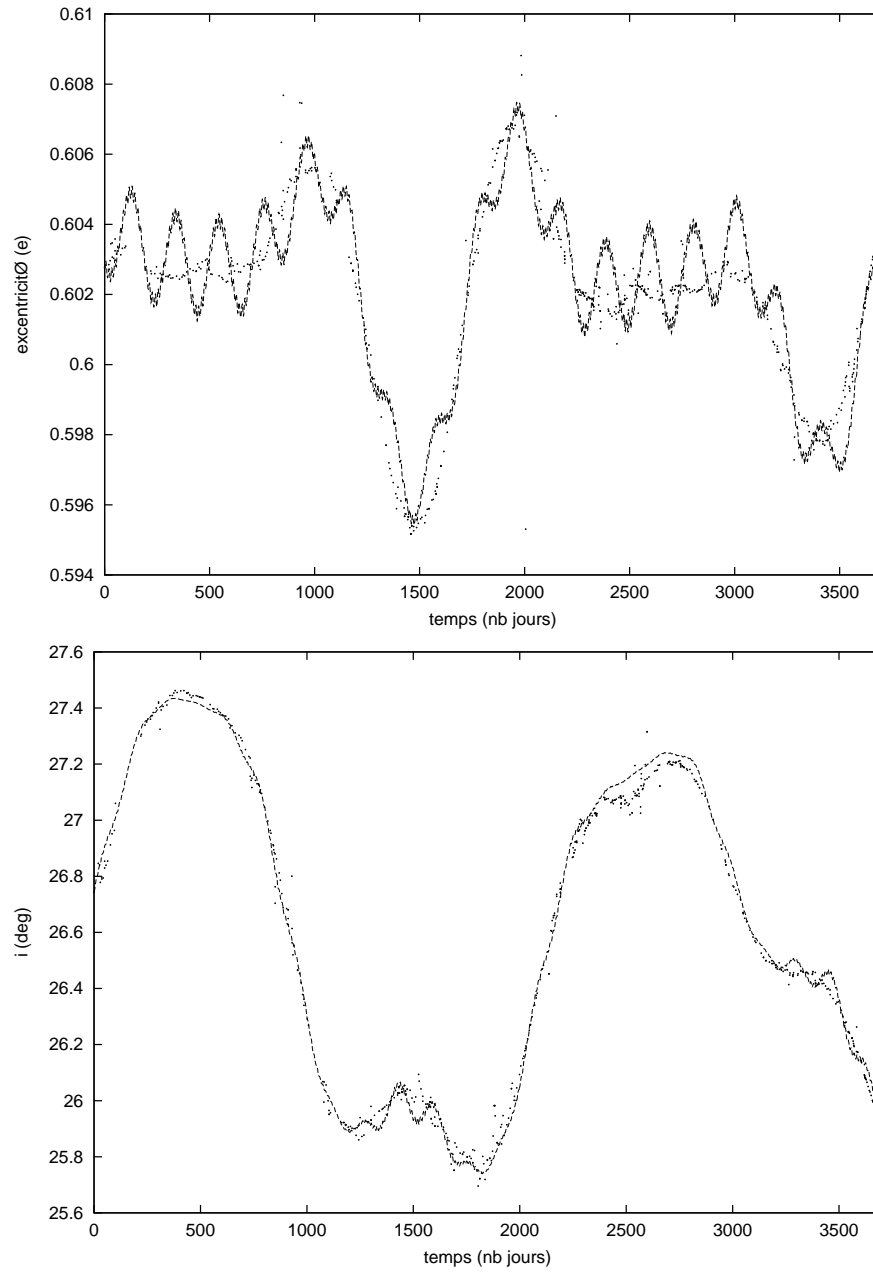


Figure 6.3 – Comparaison des résultats de SYMPSAT 2 (ligne continue) et des données TLE (points) concernant l'excentricité e et l'inclinaison i du satellite AO-10

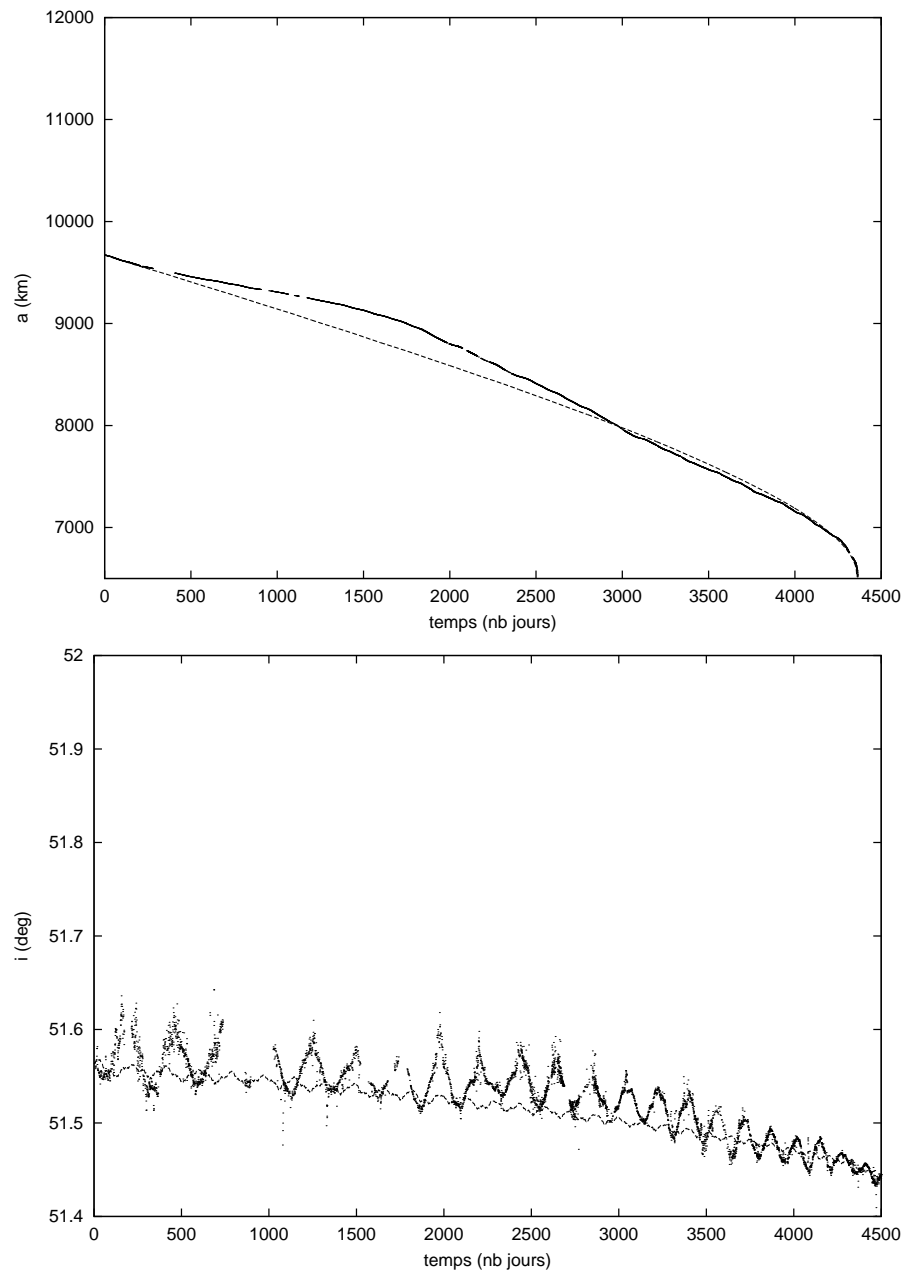


Figure 6.4 – Comparaison des résultats de SYMPSAT 2 (ligne continue) et des données TLE (points) concernant le demi-grand axe a et l'inclinaison i du satellite Cosmos 398.

6.3 Effets des différentes perturbations

L'analyse des résultats donnés par l'algorithme nous permet également de nous faire une meilleure idée des effets respectifs de chacune des perturbations. Dans cette optique, j'ai appliqué l'algorithme plusieurs fois avec les mêmes conditions initiales en ajoutant successivement les différentes perturbations dont l'algorithme peut tenir compte. Ici, j'ai considéré l'excentricité du satellite AO-10 comme variable test.

Si on lance l'algorithme en ne tenant compte que des harmoniques zonales (J_1 , J_2 , J_3 , J_4), on observe une variation périodique de type sinusoïdale (Figure 6.5). L'introduction des 6 premières harmoniques tessérales fait apparaître de petites va-

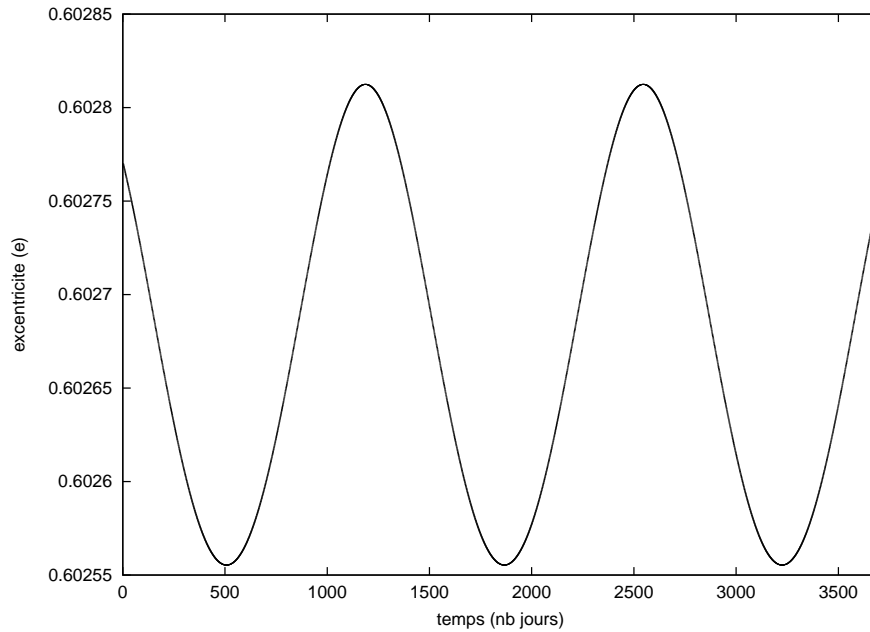


Figure 6.5 – Introduction des harmoniques zonales

riations supplémentaires à courte période (Figure 6.6). On aurait pu cependant s'attendre à observer certaines variations à longue période dues aux harmoniques résonnantes. Pour cela, il faut considérer une autre variable; à savoir le demi-grand axe du satellite AO-10. Dans ce cas (Figure 6.7), on observe facilement la superposition de variations périodiques à courte et à longue période qui étaient absentes avant l'introduction des harmoniques tessérales. Avant l'introduction de ces harmoniques nous avions en effet $\dot{L} = 0$ car l'hamiltonien contenant uniquement les harmoniques zonales est de moyenne nulle par rapport à l'anomalie moyenne ℓ par application de l'algorithme de Lie.

Il faut attendre l'introduction des perturbations dues à l'influence du Soleil et puis de la Lune (en considérant une orbite circulaire du troisième corps) pour voir apparaître une courbe se rapprochant de très près de celle correspondant au graphe des données

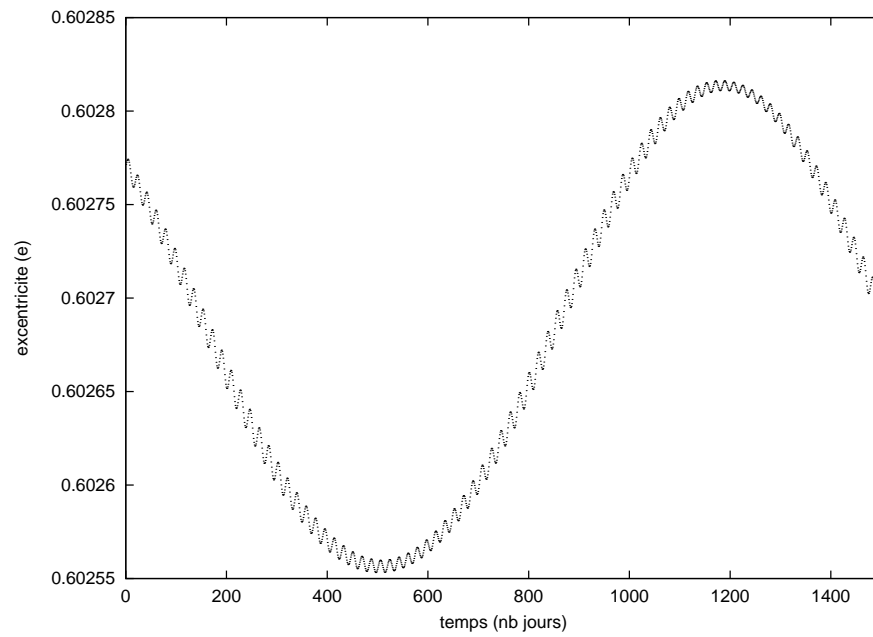
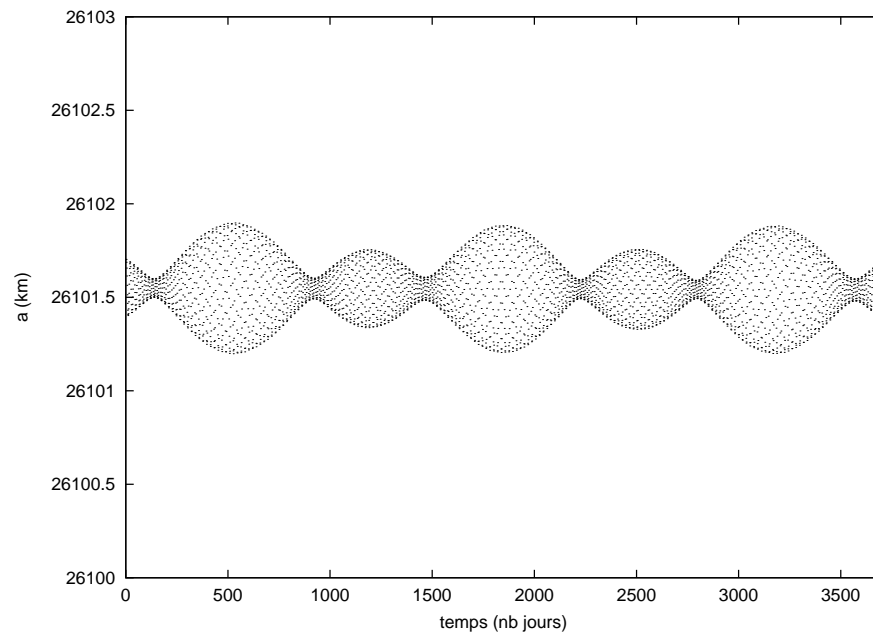


Figure 6.6 – Introduction des harmoniques tesserales

Figure 6.7 – Comportement du demi-grand axe a du satellite AO-10 suite à l'introduction des harmoniques tesserales

TLE (Figure 6.8). Dans le cas de l'excentricité, il n'y a pratiquement pas de différence entre les résultats de l'algorithme et les données TLE. Ceci étant dû au fait, comme on l'a déjà fait remarquer, que la perturbation due à la pression de radiation solaire dont on n'a pas encore tenu compte engendre des variations périodiques qui ne se trouvent pas dans les données TLE.

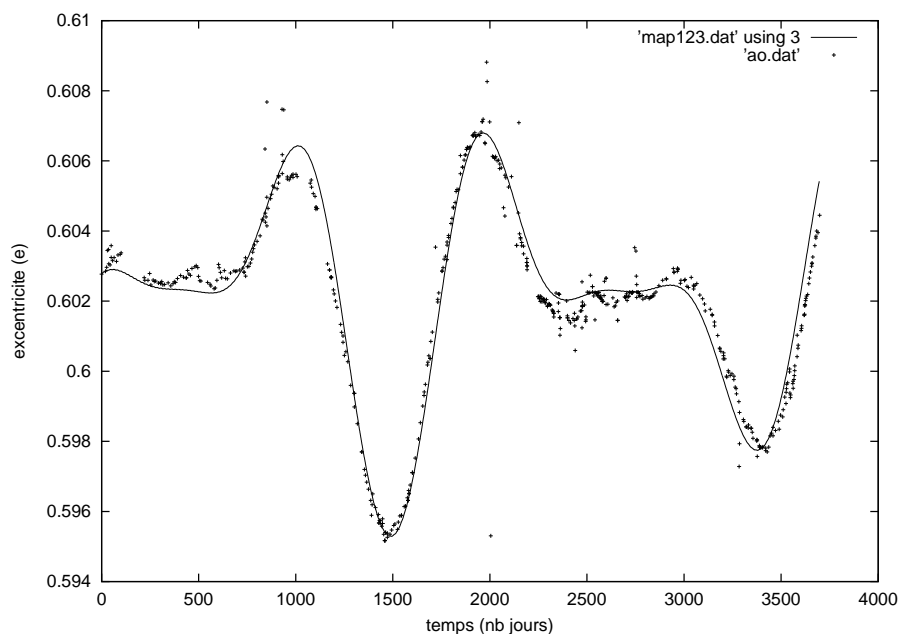


Figure 6.8 – Introduction de la perturbation luni-solaire (orbite circulaire du troisième corps). J'y ai superposé le graphe des données TLE correspondant (points).

L'introduction de la perturbation due à la pression de radiation solaire fait apparaître essentiellement des variations à longues périodes (Figure 6.9). Cette perturbation est donc capitale dans le cadre d'une intégration à long terme. Et finalement, l'introduction de la perturbation luni-solaire en ne considérant plus cette fois-ci une orbite circulaire du troisième corps fait apparaître des variations à courtes périodes d'intérêt moyen dans le cadre d'une intégration à long terme mais montrant cependant le degré maximum de précision de l'algorithme.

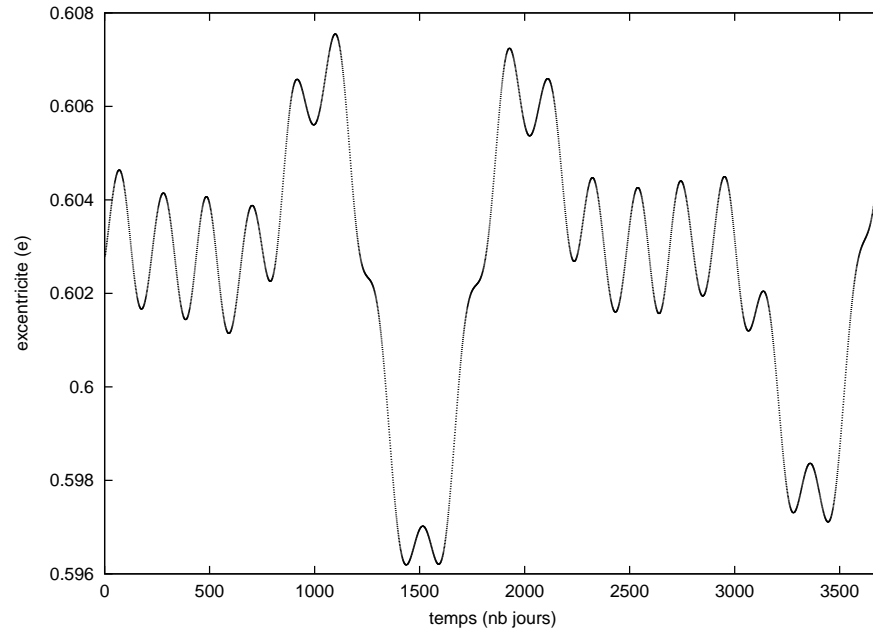


Figure 6.9 – Introduction de la perturbation due à la pression de radiation solaire

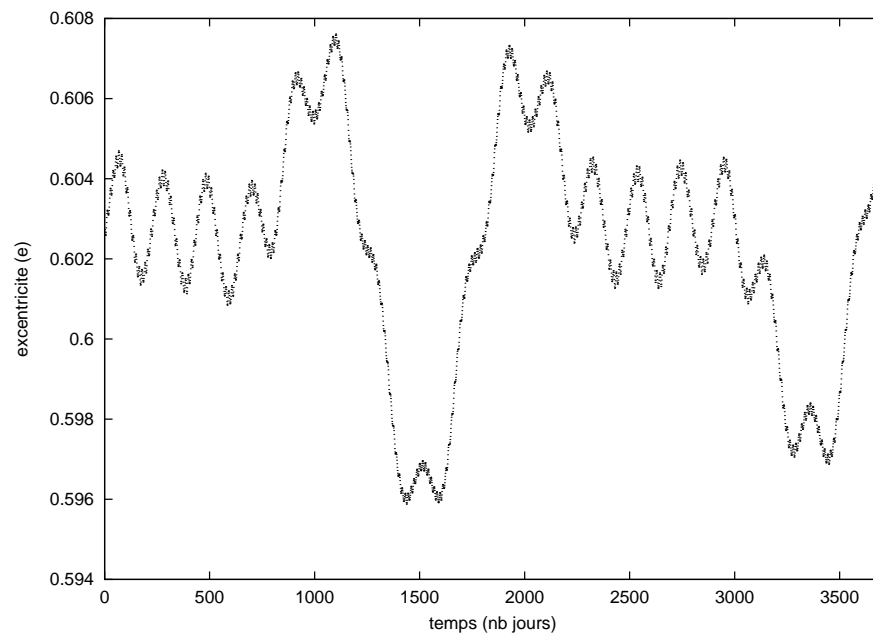


Figure 6.10 – Amélioration de la perturbation luni-solaire (orbite non-circulaire)

6.4 le drag atmosphérique

Dans notre cas, le drag atmosphérique n'a que très peu d'influence dû à la haute altitude du satellite considéré. Pour ce faire une idée de l'effet du drag sur un satellite, il suffit de regarder rapidement les graphes relatifs au satellite Cosmos 398 dans la section *Analyse de la précision et de la fiabilité de l'algorithme* (Figure 6.4) pour se rendre compte de la décroissance séculaire du demi-grand axe ainsi que de l'inclinaison jusqu'au moment où le satellite se désintègre ou se "crashe". D'autre part, la Figure 6.11 nous donne une bonne idée de l'influence du coefficient A/m . Le graphique montre la décroissance séculaire du demi-grand axe du satellite AO-10 pour deux valeurs du coefficient A/m à savoir $A_1/m_1 = 0.00261$ et $A_2/m_2 = 0.0522$. Pour la plus grande valeur du coefficient (deux fois supérieur à la première), on constate que la durée de vie du satellite est approximativement deux fois inférieure à la durée de vie du satellite relative à la plus petite valeur du coefficient.

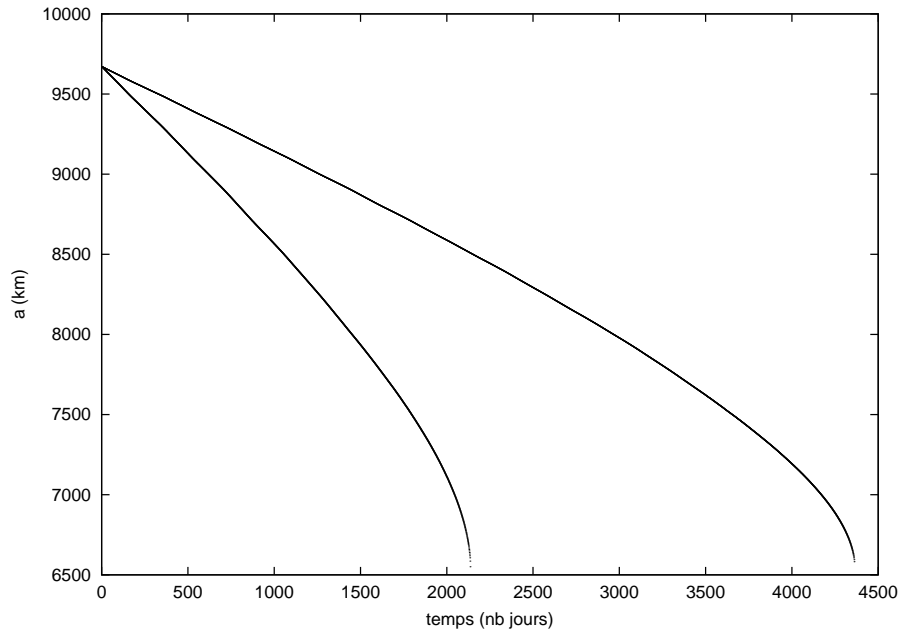


Figure 6.11 – Influence du coefficient A/m dans le cadre du drag atmosphérique

6.5 Conservation de l'énergie

Comme nous l'avons déjà dit, le coeur de l'algorithme est basé sur un mapping symplectique. Dans le cas où l'effet du drag atmosphérique n'est pas pris en compte, on devrait donc s'attendre à ce que l'énergie du système ne soit certes pas conservée mais ne possède pas d'accroissement séculaire au cours du temps. Dans le but de vérifier ceci, considérons l'expression approchée de l'énergie du système à savoir l'hamiltonien

du premier ordre ne contenant que la première harmonique zonale J_2 et déterminons la valeur numérique de cette fonction à chaque itération de l'algorithme. Bien sûr, de sorte à rester cohérent, nous ne considérerons que la perturbation due à l'harmonique zonale en J_2 lors de l'exécution de l'algorithme. Nous intégrerons le système sur une période suffisamment longue de sorte à observer une quelconque variation de l'énergie.

$$E \approx \mathcal{H} = \frac{\mu^2}{2L^2} + J_2 \frac{\mu^4 R_e^2}{4G^3 L^3} (1 - 3c^2)$$

Dans un tel cas, on observe bien des variations de l'énergie au cours du temps mais pas de variations séculaires (Figure 6.12). Par contre, si l'on tient compte de la perturbation due au drag atmosphérique, nous savons que le mapping perd son caractère symplectique et dans ce cas, comme le montre le graphique de la Figure 6.13, on observe une variation séculaire de l'énergie au cours du temps ; ce à quoi on devait s'attendre.

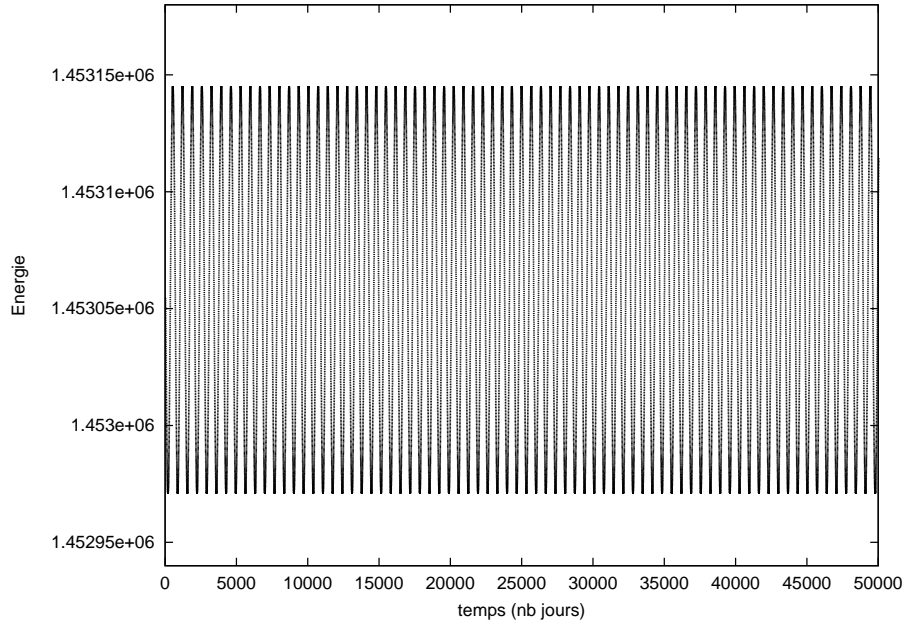


Figure 6.12 – Approximation de l'énergie E au cours des itérations de l'algorithme sans l'effet du drag atmosphérique

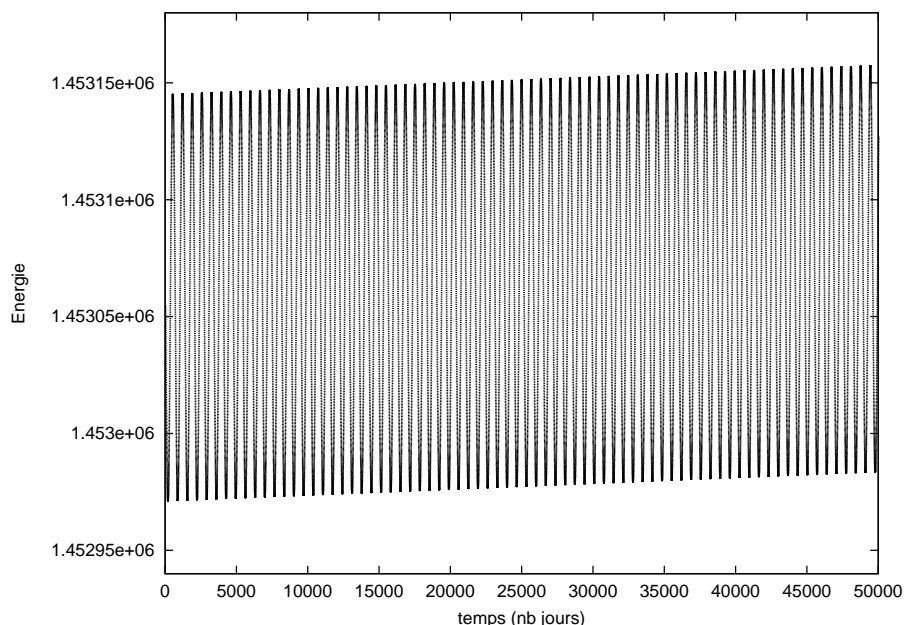


Figure 6.13 – Approximation de l'énergie E au cours des itérations de l'algorithme avec l'effet du drag atmosphérique

6.6 Code source et commentaires SYMPSAT 2

L'implémentaion complète du programme SYMPSAT 2 se compose en fait de trois fichiers. Le premier fichier MAP410.FOR, correspondant au corps principal de l'algorithme, auquel j'ai rajouté plusieurs commentaires, est présenté dans la section suivante. Les deux autres fichiers, non présentés ici, contiennent les sous-routines contenant par exemple l'implémentation du modèle atmosphérique et permettant entre autres de déterminer les dérivées des variables de Delaunay par rapport au temps correspondant à chacune des perturbations ainsi que d'évaluer les fonctions d'excentricité et d'inclinaison.

6.6.1 MAP410.FOR

```

CXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
C MAP410.FOR
CXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX

CXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
CX This is version 4.1 of the artificial satellite mapping      X
CX                               SYMPSAT 2.                    X
CX Its purpose is to generate a single trajectory for a given X

```

```

CX time-span and with a specified number of output points.      X
CX Essentially it is MAP3.1, but the integrator is implicit      X
CX midpoint and NOT the generating function method.            X
CX Entire program consists of three files:                      X
CX   1) MAP410: main program, etc.                             X
CX   2) MAP411 ( = MAP31 ),  3) MAP412 ( modified MAP32)        X
CX                                                                X
CX   S. Breiter & G. Metris,  13.08.1997                      X
cXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
\\

```

Déclarations des variables. Initialisation des constantes mathématiques et physiques. On trouve entre autres, la définition des coefficients du développement en harmoniques sphériques, la définition du rayon équatorial R_e , etc.

```

\\
      implicit real*8 (a-h,o-z)
      parameter(maxzon=4,maxtes=6,nrezo=50)
      dimension VLGH(6),VHP(6),vd1(6),vp1(6),ntr(nrezo,3)
      common /maxis/ nz,nt,nq,nsun,moon,npra
      common/STALE/ PI,PI2,RD,GM,AE,FM,tet1
      COMMON/STALE2/ au, ceps,seps, solcon, smrat,cref,isac,nvoa
      COMMON/ BANG/ KRASH,nvob
      common/COFPOT/ czon(2:maxzon),ctess(2:maxtes,1:maxtes)
2          ,stess(2:maxtes,1:maxtes)

      call stalgem2      ! Loading commons STALE, STALE2
      call loadcs       ! Loading common COFPOT - GEM T1 potential
\\

```

Lecture du fichier input *mapdat41.txt* devant contenir les conditions initiales du satellite considéré, les différents paramètres ajustables du modèle ainsi que les options relatives aux perturbations dont on désire tenir compte.

```

\\
c=====
c   Input initial conditions, parameters and options
c-----
      open(30, file='mapdat41.txt',status='old')
      read(30,*) tinit !   initial epoch - (JD-J.2000)
      read(30,*) a     !   semiaxis in Re
      read(30,*) e     !   eccentricity
      read(30,*) aincl !   inclination (deg)
      read(30,*) pl    !   mean anomaly (deg)
      read(30,*) pg    !   argument of perigee (deg)

```



```

read(30,*) ph      ! R.A. of the node (deg)
read(30,*) delti   ! time span for integration (in days)
read(30,*) nsp     ! number of evenly spaced output points
read(30,*) mult    ! step multiplier
read(30,*) nz      ! zonal harmonics degree
read(30,*) nt      ! tesseral harmonics degree&order
read(30,*) nsun    ! the code for Solar perturbations
                  ! nsun=0 - off , nsun=1 - Circular,secular
                  ! nsun=2 - "Low-precision" ephemeris
read(30,*) moon    ! the code for Lunar perturbations
                  ! 0 - off , 1 - Circular,secular,
                  ! 2 - "Low-precision" ephemeris
read(30,*) npra    ! the code for radiation pressure
                  ! 0 -off , 1 - direct, no shadow
read(30,*) isac    ! the code for drag:
                  ! 0 -off , 1 - on
read(30,*) nq      ! limiting value for the eccentricity functions
read(30,*) smrat   ! surface/mass ratio (in m^2/kg)
read(30,*) cref    ! reflectivity coefficient
read(30,*) tres
close(30)
ageo = 6.610707798d0

```

\\

Calcul des variables de Delaunay et de Poincaré correspondant aux conditions initiales. Certains artifices de calculs apparaissent pour éviter d'évaluer les soustractions $G - H$ et $L - G$. Par exemple, on a :

$$amp34 = \sqrt{\frac{2}{L+G}}eL = \sqrt{2(L-G)} = \sqrt{\frac{2.(L^2 - G^2)}{L+G}}$$

\\

```

c=====
c  Computing Delaunay and Poincare variables
c-----
      gl = dsqrt(fm*a)                      ! L = sqrt(mu*a)
      eta= dsqrt(1d0-e*e)
      gg = gl*eta                          ! G = L*eta
      c = dcos(aincl/rd)
      s = dsin(aincl/rd)
      gh = gg*c                            ! H = G*cos(i)
c-----
c  Delaunay -> VLGH
c-----
      vlgh(1) = gl                          ! 1) L

```

```

        vlgh(2) = gg                                ! 2) G
        vlgh(3) = gh                                ! 3) H
        vlgh(4) = pl/rd                             ! 4) l
        vlgh(5) = pg/rd                             ! 5) g
        vlgh(6) = ph/rd                             ! 6) h
c-----
c    Poincare -> VHP
c-----
        vhp(1) = gl                                ! 1) L
        vhp(2) = dmod(vlgh(4)+vlgh(5)+vlgh(6),pi2) ! 2) lambda=l+g+h
c    xl0=vhp(2)
c-----
c    Below - a trick to avoid subtraction
c    sqrt(L-G) -> e*L/sqrt(L+G)
c-----
        amp34 = dsqrt(2d0/(gl+gg))*gl*e
        vhp(3)= amp34*dcos(vlgh(5)+vlgh(6))         ! 3) sqrt[2(L-G)]*cos(g+h)
        vhp(4)= -amp34*dsin(vlgh(5)+vlgh(6))         ! 4) -sqrt[2(L-G)]*sin(g+h)
c    xgh0=dmod(vlgh(5)+vlgh(6),pi2)
c-----
c    Another trick to avoid subtraction
c    sqrt(G-H) -> sin(i)*G/sqrt(G+H)
c-----
        amp56 = dsqrt(2d0/(gg+gh))*gg*s
        vhp(5)= amp56*dcos(vlgh(6))                 ! 5) sqrt[2(G-H)]*cos(h)
        vhp(6)= -amp56*dsin(vlgh(6))                 ! 6) -sqrt[2(G-H)]*sin(h)
c    xh0=dmod(vlgh(6),pi2)
\\

```

Evaluation de la période orbitale du satellite de sorte à initialisé le pas d'intégration du mapping.

$$n = n_0 - \frac{J_2 \mu^4}{L^4 G^3} \left(-\frac{3}{2} + \frac{9}{4} s^2 \right)$$

Le temps sidéral θ peut également être choisis comme pas d'intégration.

```

\\
c=====
c    Mean motion in "l" with first order contribution of J2.
c    Even if J2 is neglected by options, we hold this value determining
c    the mapping step for the reason of consistency in computing
c    residual effects.
c-----
        xn0 = dsqrt(fm/a/a/a)
        xn = xn0 - Cz0n(2)*(fm**(4))*(gl**(-7))*

```

```

&      ((gg/gl)**(-3)) * (-0.15d1+0.225d1*s*s)
c=====
c We have a choice of assuming step equal to orbital period or to
c one sidereal day
c-----
      step= mult*pi2/xn      ! one orbital period
c      step= pi2/tet1      ! one sidereal day
      print*, 'Mapping step :', step
\\

```

Sur base du nombre de points voulus en output (nsp) et de l'intervalle de temps sur lequel on désire effectuer l'intégration (delti), on détermine la longueur du pas principal sepin.

```

\\
      sepin = delti/dbl(nsp)
      numstot= delti/step+1  ! number of main (output) steps without
                           ! a final, fractional
      print*, 'n/theta - 1 = ', xn/tet1-1d0
\\

```

Si la partie tesserales doit être considérée, on recherche les indices mkq relatifs aux harmoniques résonantes. On évalue ensuite les fonctions d'excentricités $G(e)$ ainsi que leurs dérivées. Dans le cas où le nombre de résonances est supérieur à un paramètre nrezo (fixé par défaut à 50), l'exécution du programme est stoppée.

```

\\
c=====
c The most important branching: tesserals included or neglected...
c-----
      if(nt.gt.0) then
          call binoew          ! Binomial coefficients for tesserals
          rezlim = xn*tres      ! resonant frequency threshold
          nofr = nombrez(vlgh, rezlim, ntr) ! The quest for resonances
          print*, nofr, rezlim
          if(nofr.gt.nrezo) STOP 'Too many resonant terms ... '
          call tabula(ntr, nofr) ! Tabulating the values of G, G', G''
      else
          nofr=0
      endif
\\

```

Boucle principale

```

\\
c=====
c Mapping loop and data output.

```

```

c=====
      tsid=dmod(pi+1.753368559233d0+tet1*tinit,pi2) ! Initial GST from
! "Con. des Temps",1986
      open(31,file='map123.dat',status='unknown')
      open(32,file='map456.dat',status='unknown')
      open(33,file='energy.dat',status='unknown') ! (Valk Stéphane)

      ttt=tinit
      npp=1
      niter=0
      niter1=0

```

\\

A chaque itération ($npp=1,2,3,\dots$), on détermine le temps suivants (future = $tinit+npp*sepin$) ainsi que le nombre entier nmp (entier par déclaration implicite) de pas d'intégration nécessaires pour l'atteindre. Si l'on dépasse le temps final fixé par l'utilisateur, l'exécution du programme est interrompue.

\\

```

10      continue
          future = tinit+npp*sepin      ! Establish next endpoint ...
          if( npp*sepin.gt.delti ) goto 25
          nmp = (future-ttt)/step      ! .. and number of steps to reach it
          write(*,100) '+',delti-(ttt-tinit),niter,niter1

```

\\

On utilise alors la sous-routine `mappot2()` pour effectuer les nmp intégrations de pas `step`. La spécification de cette sous-routine est détaillée plus loin. Il est cependant important de noter dès à présent que les variables `ttt` et `tsid` sont mises à jour à l'intérieure même de `mappot2()`.

\\

```

c+++++
          call mappot2(nmp,step,nofr,ntr,vlgh,vhp,tsid,ttt,niter)
c+++++

```

\\

Dans le cas où le satellite ne s'est pas "crasher", il reste encore à effectuer UNE intégration supplémentaire de pas `tcr` de sorte à atteindre exactement le temps suivant. Rien ne nous dit en effet que l'on a atteint le temps future puisque nous avons effectué un nombre entier de pas d'intégration `step`.

\\

```

      if(krash.eq.0) then
        do 15 kk=1,6
          vd1(kk)=vlgh(kk)

```

```

        vp1(kk)=vhp(kk)
15      continue
        tcr= future-ttt
        tscor=tsid
        t1=ttt
        call mappot2(1,tcr,nofr,ntr,vd1,vp1,tscor,t1,niter1)
        npp=npp+1
        if(krash.eq.1) goto 20
      else
        goto 20
      endif

```

\\

L'exécution de la sous-routine mappot2() a mis à jour les valeurs des variables de Delaunay et de Poincaré.

\\

```

        xlamb= dmod(vp1(2),pi2)
c      if(xlamb. gt. pi ) xlamb=xlamb - pi2 ! Sometimes
c      if(xlamb. lt. -pi ) xlamb=xlamb +pi2 ! useful....
        xgph= dmod(vd1(5)+vd1(6),pi2)
c      if(xgph. gt. pi ) xgph=xgph - pi2 ! ditto
c      if(xgph. lt. -pi ) xgph=xgph +pi2 !
        xh= dmod(vd1(6),pi2)
c      if(xh. gt. pi ) xh=xh - pi2 ! ditto
c      if(xh. lt. -pi ) xh=xh +pi2 !
c      write(32,301) ttt-tinit,dmod(xlamb-xl0,pi2),xgph-xgh0,xh-xh0
c      write(31,301) ttt-tinit,vlgh(1)**2/fm-a,
c      &          dsqrt(1d0-(vlgh(2)/vlgh(1))**2)-e,
c      &          dacos(vlgh(3)/vlgh(2))-aincl/rd
        as =(vd1(1)**2/fm)*ae
        efi = dsqrt(1d0-(vd1(2)/vd1(1))**2)
            xman = dmod(xlamb-xgph,pi2)
            if(xman.lt.0) xman = xman+pi2

```

\\

Nous sommes donc en mesure d'écrire les résultats de la première itération dans les fichiers output.

\\

```

        write(32,302) future-tinit,xlamb,xgph,xh,(xgph-xh+pi2)
write(31,302) future-tinit,as,efi,
      &          dacos(vd1(3)/vd1(2))*rd, ! INCLINAISON EN DEGRE
      &          as*(1d0-efi)-ageo*ae

```

\\

Les quatre lignes de codes suivantes m'ont permis de déterminer l'approximation de l'énergie du système à chaque itération de l'algorithme.

```

\\
c      ----- (Valk Stéphane)
      cangle=(vd1(3)/vd1(2))      ! cosinus de l'inclinaison
      E=(GM**2)/(2*(vd1(1)**2)+czon(2)
&      *(((GM**4)*(AE**2))/(4*(vd1(2)**3)*vd1(1)**3)*(1-3*(cangle**2)))
      write(33,*) E

c      -----
      goto 10
20     continue
      write(32,301) future-tinit,0d0,0d0,0d0
      write(31,301) future-tinit,0d0,0d0,0d0

```

\\

L'interruption du programme.

```

\\
25     continue
      close(31)
      close(32)
c 301     format(F12.3,3(1X,E22.15))
301     format(4(1X,E22.15))
302     format(5(1X,e22.15))
100     format(a,f30.6,i6,i6)
      end

```

Spécification et code source de la sous-routine mappot2().

```

\\
cXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
cX Symplectic mapping by the implicit midpoint method.                X
cX Geopotential, Sun and Moon as perturbing factors.                  X
cX Reference frame fixed - time-dependent Hamiltonian.                 X
cX Input:                                                                X
cX     NSP - number of mapping steps (usually 1)                       X
cX     STEP - mapping step (time interval for one sequence)            X
cX     NOFR - number of rezonant terms taken into account               X
cX     NREZTAB( , ) - the array of indices for rezonant terms           X
cX     TT - Julian Date minus J2000.                                    X
cX Input/Output:                                                         X
cX     VLGH(6) - Delaunay variables L,G,H,l,g,h                        X
cX     VHP(6) - Poincare variables: L,lambda=l+g+h,                    X
cX     X= SQRT(2(L-G))*cos(g+h),                                         X
cX     x= -SQRT(2(L-G))*sin(g+h),                                        X
cX     Y= SQRT(2(G-H))*cos(h),                                           X
cX     y= -SQRT(2(G-H))*sin(h)                                          X
cX     TSID - sidereal time                                             X

```

```

cX  Output: X
cX      NITER - number of iterations in the last sequence X
cX  @ S.Breiter & G. Metris,      Last modified - 13.08.97 X
cXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
\\

```

Déclaration des variables et paramètres.

```

\\
      subroutine mappot2(nsp,step,nofr,nreztav,vlgh,vhp,tsid,ttt,niter)
      implicit real*8 (a-h,o-z)
      parameter (TOL=1d-12,nrezo=50)
      dimension vlgh(6),vhp(6),nreztav(nrezo,3),dvtes(6),dvzon(6),
&              vdmid(6),vpmid(6),vpmup(6),vdmup(6),dvprd(6),
&              dvsun(6),dvlun(6),xvs(7),xvm(7),dvtot(6),dvdrag(6),
&              vpnew(6),vdnew(6)
      common /maxis/ nz,nt,nq,nsun,moon,npra
      common/STALE/ PI,PI2,RD,GM,AE,FM,tet1
      COMMON/STALE2/ au, ceps,seps, solcon, smrat,cref,isac,nvoida
      common/BANG/ krash, nvoidb

```

\\

L'effet des différentes perturbations (Dérivées des variables de Delaunay par rapport au temps) est initialisé à 0.

```

\\
      do 5 i=1,6
      dvzon(i)=0d0
      dvtes(i)=0d0
      dvsun(i)=0d0
      dvlun(i)=0d0
      dvprd(i)=0d0
      dvdrag(i)=0d0
5      continue

```

\\

Boucle principale de la sous-routine.

```

\\
      do 10 ii=1,nsp

```

\\

Définition de variables temporaires.

```

\\
c      =====
c      Initialisation of new variables sets
c      =====
      do 15 i=1,6
      vpmup(i)=vhp(i)      ! Poincare variables

```

```

        vdmup(i)=vlgh(i)      ! Delaunay variables
15      continue
\\

```

Détermination de :

$$t^{(n)} + \frac{1}{2}\tau$$

```

\\
c      =====
c      Time interval midpoint
c      =====
        tmid= ttt+0.5d0*step
        tsmid= tsid+0.5d0*tet1*step
\\

```

Si l'on tient compte de la perturbation luni-solaire, il est nécessaire de déterminer les coordonnées de la Lune et/ou du Soleil. Ceci se fait sur base de tables d'éphémérides implémentée dans les sous-routines moon31,moon32, sun31,sun32. En fonction du cas où l'on considère une orbite circulaire du troisième corps ou pas, on utilisera une sous-routine plutôt qu'une autre... Il reste à remarquer que ces coordonnées sont évaluées au temps mileu tmid par définition du mapping :

$$\mathbf{q}^{(n+1)} = \mathbf{q}^{(n)} + \tau f\left(\frac{1}{2}(\mathbf{q}^{(n)} + \mathbf{q}^{(n+1)}), t^{(n)} + \frac{1}{2}\tau\right)$$

```

\\
        if(moon.eq.1) call moon31(tmid,xvm,gm1m) ! secular, P2
        if(moon.eq.2) call moon32(tmid,xvm,gm1m) ! real, P2
        if(nsun.eq.1) call sun31(tmid,xvs,gm1s)  ! secular, P2
        if((nsun.eq.2).or.(npra.gt.0))
&          call sun32(tmid,xvs,gm1s)  ! real, P2
\\

```

Le fait que le mapping que nous utilisons soit implicite, nécessite l'utilisation d'un bloc itératif permettant de déterminer le vecteur des variables de Poincaré $\mathbf{q}^{(n+1)}$ à un degré de précision fixé. C'est à cela que correspond la boucle suivante !

```

\\
c      =====
c      Iterations loop 20
c      =====
        do 20 jj=1,200
            niter=jj
\\

```


Détermination du point mileu :

$$\frac{1}{2}(\mathbf{q}^{(n)} + \mathbf{q}^{(n+1)})$$

```

\\
      do 22 i=1,6
        vpmid(i) = 0.5d0*(vhp(i)+vpmup(i))
22      continue
\\

```

La sous-routine hptodel() permet de convertir le vecteur variable de Poincaré en le vecteur variable de Delaunay.

```

\\
      call hptodel(vpmid,vdmid)

      amp34 = dsqrt(vpmid(3)**2+vpmid(4)**2)
      div34 = 1d0/amp34/amp34
      amp56 = dsqrt(vpmid(5)**2+vpmid(6)**2)
      div56 = 1d0/amp56/amp56
      e = amp34/vdmid(1)*dsqrt((vdmid(1)+vdmid(2))/2d0)
      s = amp56/vdmid(2)*dsqrt((vdmid(2)+vdmid(3))/2d0)
c      =====
c      Time derivatives of Delaunay variables
c      =====
      xn = fm*fm/(vdmid(1))**3
      aact=vdmid(1)**2/fm
      q=aact*(1d0-e)
\\

```

Evaluation de la variable krash permettant de déterminer si le satellite s'est "crasher".

```

\\
      if( ((q-1d0).le.(92d0/ae)).and.(isac.gt.0) ) then
        print*, 'went down too low ...'
        krash=1
        return
      endif
\\

```

On évalue les effets respectifs de chaque perturbation sur les éléments de Delaunay ; il s'agit en fait des dérivées de ces variables par rapport au temps. Puisque l'on travaille dans le cadre d'un système hamiltonien, celles-ci sont déterminées en évaluant la dérivée de la fonction hamiltonienne correspondant à la perturbation par rapport à la variable conjuguée. (A l'exception de la perturbation due au drag atmosphérique [c.f section 4.1])

```

\\
      if(nofr.gt.0) call dottes(nofr,nreztab,vdmid,tsmid,dvtes)
      if(nz.ne.0)   call dotzon(vdmid,dvzon)
      if(nsun.gt.0) call dot3c(vdmid,xvs,gmls,dvsun)
      if(moon.gt.0) call dot3c(vdmid,xvm,gmlm,dvlun)
      if(npra.gt.0) call dotspr(vdmid,dvprd)
      if(isac.gt.0) call dotdrag(vdmid, dvdrag)
\\
Evaluation de la dérivée totale (superposition de toutes les perturbations)

```

```

\\
      do 110 mm=1,6
          dvtot(mm) = dvtes(mm)+dvzon(mm)+
&                  dvsun(mm)+dvlun(mm)+dvprd(mm)+dvdrag(mm)
110 continue
\\

```

Evaluation de la dérivée des variables de Poincaré par l'utilisation des relations (5.1). Nous sommes donc en mesure de déterminer les nouvelles variables de Poincaré (Le vecteur $q^{(n+1)}$).

```

\\
c      =====
c      Updating Poincare variables
c      =====

      vpnew(1) = vhp(1)+step*dvtot(1)                ! L
      vpnew(2) = vhp(2)+step*(xn+ dvtot(4)/e+dvtot(5)/s/e
&                  +dvtot(6)/s) ! lambda
      vpnew(3) = vhp(3)+step*(
&          vpmid(3)*div34*( dvtot(1)-dvtot(2) )
&          +vpmid(4)*(dvtot(5)/e/s+dvtot(6)/s) )    ! X
      vpnew(4) = vhp(4)+step*(
&          vpmid(4)*div34*( dvtot(1)-dvtot(2) )
&          -vpmid(3)*(dvtot(5)/e/s+dvtot(6)/s))    ! x
      vpnew(5) = vhp(5)+step*(
&          vpmid(5)*div56*(dvtot(2)-dvtot(3))
&          +vpmid(6)*dvtot(6)/s )                  ! Y
      vpnew(6) = vhp(6)+step*(
&          vpmid(6)*div56*(dvtot(2)-dvtot(3))
&          -vpmid(5)*dvtot(6)/s )                  ! y
\\

```

La variable krash est mise à jour si on détecte des éventuelles singularités relatives aux variables de Delaunay.

```

\\

```

```

détecter une éventuelle singularité
en ce qui concerne les variables de Delaunay
c      =====
c Conversion to updated Delaunay elements
c and security check for L<=0, G>L, G<=0, H>G, |H|>=G
c      =====
      call hptodel(vpnew,vdnew)
      if((vdnew(1).le.0d0).OR.(vdnew(2).gt.vdnew(1)).OR.
        & (vdnew(2).le.0d0).OR.(dabs(vdnew(3)).gt.vdnew(2)) )then
        krash=1
        print*, ' '
        print*, 'MAPPOT: ',vdnew(1),vdnew(2),vdnew(3)
        print*, ' '
        return
      endif
\\

```

Si l'erreur relative commise sur l'évaluation du vecteur $q^{(n+1)}$ est trop importante, on met à jour la variable temporaire `vpmpup()` et on évalue un nouveau vecteur $q^{(n+1)}$; sinon, on peut passer à l'itération suivante. On procède ainsi jusqu'à ce qu'on ait effectué les nsp pas d'intégration.

```

\\
c      =====
c      Error evaluation
c      =====
      error = dabs(vpmup(1)-vpnew(1))/vpnew(1)
      error = error +dabs(vpmup(3)-vpnew(3))/amp34
      error = error +dabs(vpmup(5)-vpnew(5))/amp56
      error = error + dabs(vpmup(2)-vpnew(2))
      error = error+dabs(vpmup(4)-vpnew(4))/amp34
      error = error+dabs(vpmup(6)-vpnew(6))/amp34
      do 25 i=1,6
        vpmup(i)=vpnew(i)
25      continue
      call hptodel(vpmup,vdmup)
      if(error.le.TOL) goto 50
20      continue
c      =====
c      Iterations are finished.
c      =====
50      continue
      tsid=tsid+step*tet1
      ttt= ttt+step
      do 55 i=1,6

```

```

        vhp(i)=vpmup(i)
        vlgh(i)=vdmup(i)
55    continue
10    continue
    vhp(2) = dmod(vhp(2),pi2)
    vlgh(4) = dmod(vlgh(4),pi2)
    vlgh(5) = dmod(vlgh(5),pi2)
    vlgh(6) = dmod(vlgh(6),pi2)
    return
end
\\

```

Implémentation de la sous-routine permettant de convertir les variables de Poincaré en les variables de Delaunay.

```

\\
cXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
cX  Conversion of Poincare elements to Delaunay elements                X
cXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
    subroutine HPTODEL(hp,del)
    implicit real*8 (a-h,o-z)
    dimension hp(6),del(6)

    del(1)=hp(1)
    amp34=dsqrt(hp(3)**2+hp(4)**2)
    amp56=dsqrt(hp(5)**2+hp(6)**2)
    del(2)= hp(1)-0.5d0*amp34*amp34
    del(3)= del(2)-0.5d0*amp56*amp56
    gph = datan2( -hp(4)/amp34 , hp(3)/amp34 )
    del(6) = datan2( -hp(6)/amp56 , hp(5)/amp56 )
    del(5) = gph-del(6)
    del(4) = hp(2)-gph
    return
end
\\

```

Sous-routine correspondant à l'initialisation des constantes mathématiques et physiques ainsi que différents paramètres du modèle.

```

\\
cXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
cX  Earth gravity and mathematical constants - according to GEMT1      X
cXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX

    SUBROUTINE STALGEM2
    IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
    COMMON /STALE/ PI,PI2,RD,GM,AE,FM,tet1

```

```

COMMON/STALE2/ au,ceps,seps,solcon,soverm,cr,isac,nvoida

PI=DATAN(1.0D0)*4.0D0
PI2=2.0D0*PI
RD=180.0D0/PI
c Below: GM in km^3/s^2
GM=398600.436D0
c Earth radius in km
AE=6378.137D0

FM=GM*3600.0D0/(AE*AE*AE)
FM=FM*(1440.0D0)**2
c FM is geocentric "mu" expressed in Rz**(3), d^(-2)
tet1=1.00273790926493d0*pi2
c TET1 is Earth sidereal rotation rate in rad/d

c Obliquity sine and cosine, astronomical unit
ceps=0.91748206206918d0      ! cos(epsilon)
seps=0.39777715593191d0      ! sin(epsilon)
au = 1.4959787d8/ae

solcon = 4.560d-6
c SOLCON is ratio Solar Constant/ speed of light in kg/m/s^2
c ISAC, SOVERM and CR are set in MAIN program

RETURN
END

```

\\

Définition des coefficients du développement en harmoniques sphériques.

\\

```

cXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
subroutine loadcs                                                    X
cXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
implicit real*8 (a-h,o-z)
parameter (maxzon=4,maxtes=6)
common /cofpot/ czon(2:maxzon),ctess(2:maxtes,1:maxtes),
& stess(2:maxtes,1:maxtes)

c Zonal denormalised
czon(2)= -.108263d-2
czon(3)= .253261d-5
czon(4)= .161620d-5
c Tesseral - normalised

```

```
ctess(2,1)= 0d0
ctess(2,2)= .243893d-5
ctess(3,1)= .202977d-5
ctess(3,2)= .903549d-6
ctess(3,3)= .720987d-6
ctess(4,1)= -.533427d-6
ctess(4,2)= .347002d-6
ctess(4,3)= .990978d-6
ctess(4,4)= -.190035d-6

ctess(5,1)= -.0589503d-6
ctess(5,2)= .6557903d-6
ctess(5,3)= -.4482036d-6
ctess(5,4)= -.2948236d-6
ctess(5,5)= .1777563d-6
ctess(6,1)= -.0813751d-6
ctess(6,2)= .0516096d-6
ctess(6,3)= .0619709d-6
ctess(6,4)= -.0927975d-6
ctess(6,5)= -.2657650d-6
ctess(6,6)= .0090593d-6

stess(2,1)= 0d0
stess(2,2)= -.139984d-5
stess(3,1)= .249595d-6
stess(3,2)= -.620420d-6
stess(3,3)= .141317d-5
stess(4,1)= -.475119d-6
stess(4,2)= .664030d-6
stess(4,3)= -.200621d-6
stess(4,4)= .308460d-6
stess(5,1)= -.0955435d-6
stess(5,2)= -.3234056d-6
stess(5,3)= -.2151363d-6
stess(5,4)= .0524087d-6
stess(5,5)= -.6660281d-6
stess(6,1)= .0238901d-6
stess(6,2)= -.3749956d-6
stess(6,3)= .0046430d-6
stess(6,4)= -.4733070d-6
stess(6,5)= -.5377472d-6
stess(6,6)= -.2363344d-6

return
```

end

Conclusion

L'algorithme étudié dans le cadre de ce mémoire s'avère être un outil efficace pour l'étude qualitative du mouvement de satellites terrestres ou de tout autre objet en orbite terrestre. La fiabilité de l'intégration à long terme est une conséquence directe de l'utilisation d'un mapping symplectique. En ce qui concerne le temps d'exécution de l'algorithme, comme on l'a déjà signaler, c'est la partie tessérale du géopotentiel qui est la cause première de l'augmentation du temps de calcul nécessaire pour une intégration. A titre d'exemple, dans le cas du satellite A0-10, une intégration sur une période de 20 ans en tenant compte de l'ensemble des perturbations, donne lieu à un temps de calcul de 45 s sur un ordinateur doté d'un processeur Pentium II 450 Mghz. Si l'on retire la partie tessérale lors de l'intégration, le temps de calcul chute à moins de 15 s.

Cet algorithme peut avoir plusieurs applications : nous avons déjà parlé dans l'introduction de la modélisation du comportement à long terme des débris spatiaux, on peut également citer la recherche d'orbites périodiques ainsi que la détermination de la durée de vie de satellites relative à certaines classes bien précises d'orbites.

Annexe A

Précisions complémentaires

Sommaire

A.1 Expression du Laplacien $\nabla^2 V$ en coordonnées sphériques

Considérons donc les coordonnées sphériques :

$$\begin{aligned} x &= r \cos \phi \cos \lambda \\ y &= r \cos \phi \sin \lambda \\ z &= r \sin \phi \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned} dr &= \cos \phi \cos \lambda dx + \cos \phi \sin \lambda dy + \sin \phi dz \\ d\phi &= -\frac{1}{r} \sin \phi \cos \lambda dx + -\frac{1}{r} \sin \phi \sin \lambda dy + \frac{1}{r} \cos \phi dz \\ d\lambda &= -\frac{1}{r \cos \phi} \sin \lambda dx + \frac{1}{r \cos \phi} \cos \lambda dy \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} &= \frac{\partial V}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x} \\ &= \frac{\partial V}{\partial r} \cos \phi \cos \lambda - \frac{\partial V}{\partial \phi} \frac{1}{r} \sin \phi \sin \lambda - \frac{\sin \lambda}{r \cos \phi} \frac{\partial V}{\partial \lambda} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} &= \left[\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} \cos \phi \cos \lambda + \left(\frac{\partial V}{\partial \phi} \cdot \frac{1}{r} - \frac{\partial^2 V}{\partial \phi \partial r} \right) \frac{1}{r} \sin \phi \cos \lambda \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sin \lambda}{r \cos \phi} \left(\frac{\partial V}{\partial \lambda} \cdot \frac{1}{r} - \frac{\partial^2 V}{\partial \lambda \partial r} \right) \right] \frac{\partial r}{\partial x} + \text{des termes similaires} \times \frac{\partial \phi}{\partial x} \text{ et } \frac{\partial \lambda}{\partial x} \end{aligned}$$

Des expressions analogues sont trouvées pour

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \text{ et } \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

Dès lors, après sommation, on obtient :

$$r^2 \nabla^2 V = \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{\cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\cos \phi \frac{\partial V}{\partial \phi} \right) + \frac{1}{\cos^2 \phi} \frac{\partial^2 V}{\partial \lambda^2}$$

De manière plus générale, on a :

$$\boxed{\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{\cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\cos \phi \frac{\partial}{\partial \phi} \right) + \frac{1}{\cos^2 \phi} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \right]}$$

A.2 Le mapping “midpoint method” est du second ordre

Le mapping “midpoint method” peut s’exprimer sous la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} \varphi^{(n+1)} \\ I^{(n+1)} \\ t^{(n+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi \\ I \\ t \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} F_\varphi(\frac{1}{2}(\varphi + \varphi^{(n+1)}), \frac{1}{2}(I + I^{(n+1)}), t + \frac{\tau}{2}) \\ F_I(\frac{1}{2}(\varphi + \varphi^{(n+1)}), \frac{1}{2}(I + I^{(n+1)}), t + \frac{\tau}{2}) \\ F_t(=1) \end{pmatrix}$$

où $\varphi^{(n+1)}$ représente les variables et $I^{(n+1)}$ les moments correspondants.

On a :

$$\begin{aligned} \varphi^{(n+1)} &= \varphi + \tau F_\varphi \left[\frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{2}(\varphi + \tau F_\varphi), \frac{1}{2}I + \frac{1}{2}(I + \tau F_I), t + \frac{\tau}{2} \right] \\ &= \varphi + \tau F_\varphi(\varphi + \frac{\tau}{2}F_{\varphi I} + \frac{\tau}{2}F_{It} + \frac{\tau}{2}) \\ &= \varphi + \tau F_\varphi(\varphi, I, t) + \tau F_{\varphi\varphi} \frac{\tau}{2} F_\varphi + \tau F_{\varphi I} \frac{\tau}{2} F_I + \tau F_{\varphi t} \frac{\tau}{2} + \dots \\ &= \varphi + \tau F_\varphi(\varphi, I, t) + \frac{\tau^2}{2} [F_{\varphi\varphi} F_\varphi + F_{\varphi I} F_I + F_{\varphi t} + 1] + \dots \end{aligned}$$

De manière analogue, on peut montrer :

$$\begin{aligned} I^{(n+1)} &= I + \tau F_I(\varphi, I, t) + \frac{\tau^2}{2} [F_{I\varphi} F_\varphi + F_{II} F_I + F_{It} + 1] + \dots \\ t^{(n+1)} &= t + \tau \end{aligned}$$

Réécrivons ces relations sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \varphi^{(n+1)} \\ I^{(n+1)} \\ t^{(n+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi \\ I \\ t \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} F_\varphi \\ F_I \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{\tau^2}{2} \begin{pmatrix} F_{\varphi\varphi} & F_{\varphi I} & F_{\varphi t} \\ F_{I\varphi} & F_{II} & F_{It} \\ F_{t\varphi}(=0) & F_{tI}(=0) & F_{tt}(=0) \end{pmatrix}$$

En notant $z = \begin{pmatrix} \varphi \\ I \\ t \end{pmatrix}$, on a :

$$z^{(n+1)} = z + \tau f(z) + \frac{\tau^2}{2} f'(z) f(z) + \dots$$

Le mapping est donc bien du second ordre car il est en accord avec le développement en série de Taylor jusqu’à l’ordre 2.

A.3 Caractère symplectique du mapping “midpoint method”

Dans le cas particulier où l'on ne considère pas le frottement atmosphérique (*i.e* $f = \mathcal{H}$), on a :

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= I_n - \tau \mathcal{H}_\varphi \left(\frac{1}{2}(\varphi_{n+1} + \varphi_n), \frac{1}{2}(I_{n+1} + I_n) \right) \\ \varphi_{n+1} &= \varphi_n + \tau \mathcal{H}_I \left(\frac{1}{2}(\varphi_{n+1} + \varphi_n), \frac{1}{2}(I_{n+1} + I_n) \right) \end{aligned}$$

où φ correspond au vecteur variables (q_1, q_2, q_3) et I au vecteur momment associé (q_4, q_5, q_6)

Notons

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_{n+1}}{\partial \varphi_n} &= \alpha & \frac{\partial I_{n+1}}{\partial I_n} &= \beta \\ \frac{\partial \varphi_{n+1}}{\partial \varphi_n} &= \gamma & \frac{\partial \varphi_{n+1}}{\partial I_n} &= \delta \end{aligned}$$

Par dérivation par rapport à φ_n , on obtient :

$$\alpha = 0 - \tau \mathcal{H}_{\varphi\varphi} \left(\frac{1}{2}\gamma + \frac{1}{2} \right) - \tau \mathcal{H}_{\varphi I} \left(\frac{1}{2}\alpha \right)$$

$$\gamma = 0 - \tau \mathcal{H}_{I\varphi} \left(\frac{1}{2}\gamma + \frac{1}{2} \right) - \tau \mathcal{H}_{II} \left(\frac{1}{2}\alpha \right)$$

$$\alpha \left(1 + \frac{\tau}{2} \mathcal{H}_{\varphi I} \right) + \left(\frac{\tau}{2} \mathcal{H}_{\varphi\varphi} \right) \gamma = -\frac{\tau}{2} \mathcal{H}_{\varphi\varphi}$$

$$\alpha \left(\frac{\tau}{2} \mathcal{H}_{II} \right) + \left(\frac{\tau}{2} \mathcal{H}_{I\varphi} - 1 \right) \gamma = -1 - \frac{\tau}{2} \mathcal{H}_{I\varphi}$$

La résolution de ce système nous donne :

$$\alpha = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} -\frac{\tau}{2}A & \frac{\tau}{2}A \\ -1 - \frac{\tau}{2}B & \frac{\tau}{2}B - 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{\Delta} \left(-\frac{\tau^2}{4}AB + \frac{\tau}{2}A + \frac{\tau}{2}A + \frac{\tau^2}{4}AB \right) = \frac{1}{\Delta}(\tau A)$$

$$\gamma = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 1 + \frac{\tau}{2}B & -\frac{\tau}{2}A \\ \frac{\tau}{2}C & -1 - \frac{\tau}{2}B \end{vmatrix} = \frac{1}{\Delta} \left(-1 - \frac{\tau^2}{4}B^2 - \tau B + \frac{\tau^2}{4}AC \right)$$

$$\text{avec } \Delta = \frac{\tau^2}{4}B^2 - 1 - \frac{\tau^2}{4}AC = \frac{\tau^2}{4}(B^2 - AC) - 1$$

De manière analogue, on obtient :

$$\begin{aligned}\beta &= \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 1 - \frac{\tau}{2}B & \frac{\tau}{2}A \\ -\frac{\tau}{2}C & -1 - \frac{\tau}{2}B \end{vmatrix} = \frac{1}{\Delta} \left(-1 - \frac{\tau^2}{4}B^2 + \frac{\tau}{2}B + \frac{\tau^2}{4}AB \right) \\ \delta &= \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 1 + \frac{\tau}{2}B & 1 - \frac{\tau}{2}B \\ \frac{\tau}{2}C & -\frac{\tau}{2}C \end{vmatrix} = \frac{1}{\Delta} \left(-\frac{\tau}{2}C - -\frac{\tau}{2}C \right) = \frac{1}{\Delta}(\tau C)\end{aligned}$$

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une transformation $y_i = Y_i(\vec{x}, t)$ soit symplectique étant

$$(y_i; y_j) = \{YLY^T\}_j^i = \delta_{j-n}^i \quad (1 \leq i < j \leq 2n)$$

où δ_k^i est le symbole de Kronecker, égal à zéro si $i \neq k$ et à un si $i = k$. La notation $(y_i; y_j)$ désigne la parenthèse de Poisson. On démontre dès lors facilement le caractère symplectique du mapping.

En effet :

$$\begin{aligned}(\varphi_{n+1}; I_{n+1}) &= \frac{\partial \varphi_{n+1}}{\partial \varphi_n} \frac{\partial I_{n+1}}{\partial I_n} - \frac{\partial \varphi_{n+1}}{\partial I_n} \frac{\partial I_{n+1}}{\partial \varphi_n} \\ &= \gamma\beta - \delta\alpha \\ &= \frac{1}{\Delta^2} \left(-1 - \frac{\tau^2}{4}B^2 - \tau B + \frac{\tau^2}{4}AC \right) \left(-1 - \frac{\tau^2}{4}B^2 + \tau B + \frac{\tau^2}{4}AC \right) \\ &\quad - \frac{1}{\Delta^2} (-\tau C) \cdot \tau A \\ &= \frac{1}{\Delta^2} \left[\left(-1 - \frac{\tau^2}{4}B^2 + \frac{\tau^2}{4}AC \right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{\Delta^2} [\Delta^2 + 4 + 4\Delta - 4 - 4\Delta] \\ &= 1\end{aligned}$$

A.4 Fonctions d'inclinaison $F_{lmp}(I)$

Par l'article de Kaula (c.f [5]) on a :

$$\begin{aligned}
 F_{lmp}(I) = & \sum_t^{\min(p,k)} \frac{(2l-2t)!}{t!(l-t)!(l-m-2t)!2^{2l-2t}} \sin^{l-m-2t} I \\
 & \times \sum_{s=0}^m \binom{m}{s} \cos^s I \sum_c \binom{l-m-2t+s}{c} \binom{m-s}{p-t-c} (-1)^{c-k}
 \end{aligned} \tag{A.1}$$

avec

- $k = E\left(\frac{l-m}{2}\right)$
- c est sommé pour toutes les valeurs n'annulant pas les coefficients binomiaux.

Une telle formule n'étant pratique que dans le cadre d'une implémentation informatique, nous donnons une liste de plusieurs valeurs de $F_{lmp}(I)$ dans la Table A.1.

A.5 Fonctions d'excentricité $G_{lpq}(e)$

L'expression analytique de cette fonction étant encore plus compliquée que pour les fonctions d'inclinaison $F_{lmp}(I)$, nous donnons directement la table de plusieurs de ces valeurs (Table A.2).

Table A.1 – Fonctions d'inclinaison $F_{lmp}(i)$ (A.1) jusque $lmp = 444$ (c.f [5])

l	m	p	$F_{lmp}(i)$
2	0	0	$-3 \sin^2 i/8$
2	0	1	$3 \sin^2 i/4 - 1/2$
2	0	2	$-3 \sin^2 i/8$
2	1	0	$3 \sin i(1 + \cos i)/4$
2	1	1	$-3 \sin i \cos i/2$
2	1	2	$-3 \sin i(1 - \cos i)/4$
2	2	0	$3(1 + \cos i)^2/4$
2	2	1	$3 \sin^2 i/2$
2	2	2	$3(1 - \cos i)^2/4$
3	0	0	$-5 \sin^3 i/16$
3	0	1	$15 \sin^3 i/16 - 3 \sin i/4$
3	0	2	$-15 \sin^3 i/16 + 3 \sin i/4$
3	0	3	$5 \sin^3 i/16$
3	1	0	$-15 \sin^2 i(1 + \cos i)/16$
<hr/>			
l	m	p	$F_{lmp}(i)$
3	1	1	$15 \sin^2 i(1 + 3 \cos i)/16 - 3(1 + \cos i)/4$
3	1	2	$15 \sin^2 i(1 - 3 \cos i)/16 - 3(1 - \cos i)/4$
3	1	3	$-15 \sin^2 i(1 - \cos i)/16$
3	2	0	$15 \sin i(1 + \cos i)^2/8$
3	2	1	$15 \sin i(1 - 2 \cos i - 3 \cos^2 i)/8$
3	2	2	$-15 \sin i(1 + 2 \cos i - 3 \cos^2 i)/8$
3	2	3	$-15 \sin i(1 - \cos i)^2/8$
3	3	0	$15(1 + \cos i)^3/8$
3	3	1	$45 \sin^2 i(1 + \cos i)/8$
3	3	2	$45 \sin^2 i(1 - \cos i)/8$
3	3	3	$15(1 - \cos i)^3/8$
4	0	0	$35 \sin^4 i/128$
4	0	1	$-35 \sin^4 i/32 + 15 \sin^2 i/16$
4	0	2	$(105/64) \sin^4 i - (15/8) \sin^2 i + 3/8$
4	0	3	$-(35/32) \sin^4 i + (15/16) \sin^2 i$
4	0	4	$(35/128) \sin^4 i$
4	1	0	$-(35/32) \sin^3 i(1 + \cos i)$
4	1	1	$(35/16) \sin^3 i(1 + 2 \cos i) - (15/8)(1 + \cos i) \sin i$
4	1	2	$\cos i(15 \sin i/4 - 105 \sin^3 i/16)$
4	1	3	$-(35/16) \sin^3 i(1 - 2 \cos i) + (15/8) \sin i(1 - \cos i)$
4	1	4	$(35/32) \sin^3 i(1 - \cos i)$
4	2	0	$-(105/32) \sin i(1 + \cos i)^2$
4	2	1	$(105/8) \sin^2 i \cos i(1 + \cos i) - (15/8)(1 + \cos i)^2$
4	2	2	$(105/16) \sin^2 i(1 - 3 \cos^2 i) + (15/4) \sin^2 i$
4	2	3	$-(105/8) \sin^2 i \cos i(1 - \cos i) - (15/8)(1 - \cos i)^2$
4	2	4	$-(105/32) \sin^2 i(1 - \cos i)^2$
4	3	0	$(105/16) \sin i(1 + \cos i)^3$
4	3	1	$(105/8) \sin i(1 - 3 \cos^2 i - 2 \cos^3 i)$
4	3	2	$-(315/8) \sin^3 i \cos i$
4	3	3	$-(105/8) \sin i(1 - 3 \cos^2 i + 2 \cos^3 i)$
4	3	4	$-(105/16) \sin i(1 - \cos i)^3$
4	4	0	$(105/16)(1 + \cos i)^4$
4	4	1	$(105/4) \sin^2 i(1 + \cos i)^2$
4	4	2	$(315/8) \sin^4 i$
4	4	3	$(105/4) \sin^2 i(1 - \cos i)^2$
4	4	4	$(105/16)(1 - \cos i)^4$

Table A.2 – Fonctions d'excentricité $G_{lpq}(e)$ jusque $lpq = 442$ (c.f [5])

l	p	q	l	p	q	$G_{lpq}(e)$
2	0	-2	2	2	2	0
2	0	-1	2	2	1	$-e/2 + e^3/16 + \dots$
2	0	0	2	2	0	$1 - 5e^2/2 + 13e^4/16 + \dots$
2	0	1	2	2	-1	$7e/2 - 123e^3/16 + \dots$
2	0	2	2	2	-2	$17e^2/2 - 115e^4/6 + \dots$
2	1	-2	2	1	2	$9e^2/4 + 7e^4/4 + \dots$
2	1	-1	2	1	1	$3e/2 + 27e^3/16 + \dots$
			2	1	0	$(1 - e^2)^{-3/2}$
3	0	-2	3	3	2	$e^2/8 + e^4/48 + \dots$
3	0	-1	3	3	1	$-e + 5e^3/4 + \dots$
3	0	0	3	3	0	$1 - 6e^2 + 423e^4/64 + \dots$
3	0	1	3	3	-1	$5e - 22e^3 + \dots$
3	0	2	3	3	-2	$127e^2/8 - 3065e^4/48 + \dots$
3	1	-2	3	2	2	$11e^2/8 + 49e^4/16 + \dots$
3	1	-1	3	2	1	$e(1 - e^2)^{-5/2}$
3	1	0	3	2	0	$1 + 2e^2 + 239e^4/64 + \dots$
3	1	1	3	2	-1	$3e + 11e^3/4 + \dots$
3	1	2	3	2	-2	$53e^2/8 + 39e^4/16 + \dots$
4	0	-2	4	4	2	$e^2/2 - e^4/3 + \dots$
4	0	-1	4	4	1	$-3e/2 + 75e^3/16 + \dots$
4	0	0	4	4	0	$1 - 11e^2 + 199e^4/8 + \dots$
4	0	1	4	4	-1	$13e/2 - 765e^3/16 + \dots$
4	0	2	4	4	-2	$51e^2/2 - 321e^4/2 + \dots$
4	1	-2	4	3	2	$(3e^2/4)(1 - e^2)^{-7/2}$
4	1	-1	4	3	1	$e/2 + 33e^3/16 + \dots$
4	1	0	4	3	0	$1 + e^2 + 65e^4/16 + \dots$
4	1	1	4	3	-1	$9e/2 - 3e^3/16 + \dots$
4	1	2	4	3	-2	$53e^2/4 - 179e^4/24 + \dots$
4	2	-2	4	2	2	$5e^2 + 155e^4/12 + \dots$
4	2	-1	4	2	1	$5e/2 + 135e^3/16 + \dots$
			4	2	0	$(1 + 3e^2/2)(1 - e^2)^{-7/2}$

Bibliographie

- [1] Brett Gladman & Martin Duncan. Symplectic integrators for long-term integrations in celestial mechanics. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 52 :221–240, 1991.
- [2] Métris Gilles. *Théorie du mouvement du satellite artificiel*. PhD thesis, Observatoire de Paris, 1991.
- [3] Yoshida H. Recent progress in the theory and applications of symplectic integrators. *Celestial Mechanics*, 56 :27–43, 1993.
- [4] Hiroshi Kinoshita & Hiroshi Nakai Haruo Yoshida. Symplectic integrators and their application to dynamical astronomy. *Celestial Mechanics*, 50 :59–71, 1990.
- [5] William M. Kaula. Theory of satellite geodesy. Blaisdell Publishing Company.
- [6] S. Breiter & G. Metris. Symplectic mapping for satellites and space debris including nongravitational forces. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 71 :79–94, 1999.
- [7] François Mignard. On the radiation forces. In *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*.
- [8] Edwin Wnuk. Tesseral harmonic perturbations for high order and degree harmonics. *Celestial Mechanics*, pages 179–192, 1989.
- [9] Dewaegheneire Xavier. Système hamiltonien perturbé par une force non conservative : application au drag de stokes, 1995.